UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
Examen de Fevrier 1998
A. Nassiri
Durée = 3 heures

Attention : Une bonne présentation de la copie sera récompensée ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de préciser le numéro de la question dans vos réponses

Question de cours

1) Donner un exemple de variable aléatoire qui suit une loi hypergéométrique. Sous quelles conditions, est-il possible d'utiliser la loi binomiale pour traiter votre exemple. (1,5 point)

2) Démontrer l'égalité suivante : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (1,5 point)

Corrigé : voir cours.

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, d'un dé non pipé, et de 10 boules numérotées de 1 à 10. On définit les trois événements suivants :

A : Obtenir " Pile " avec la pièce de monnaie,
B : Obtenir un multiple de 2 avec le dé,
C : Obtenir un nombre impair en tirant une boule

Q1) Calculer la probabilité de réalisation de chaque événement. (0,5 point)
$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$

Q2) Les trois événements A, B et C, sont-ils **indépendants** ou incompatibles ? Expliquez. (0,5 point)

Q3) Calculer la probabilité des événements : $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$. (1 point)
$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$ et $P(A \cap B \cap C) = 1/8$.

Q4) Si au moins un des événements se réalise, le gain est de 10 F ;
si seulement un événement se réalise, le gain est de 20 F ;
si seulement deux événements se réalisent, le gain et de 15 F.
Quel est le gain le plus probable ? (1 point)

X : "Variable aléatoire qui représente le gain". $Pr(X = 10) = Pr(A \cup B \cup C)$

Exercice 2

Les ventes mensuelles de deux biens A et B sont parfaitement indépendantes et leurs chiffres d'affaire (en million de F) sont distribués respectivement selon les deux tableaux suivants :

Bien A	
Chiffre d'affaire	Probabilité
2	0.70
5	0.30

Bien B	
Chiffre d'affaire	Probabilité
1	0.4
2	0.4
3	0.2

Q1) Calculer le chiffre d'affaire moyen pour chaque bien, en déduire celui du chiffre d'affaire total des deux biens. (1 point)

$E(A) = 2,9$ et $E(B) = 1,8 \Longrightarrow E(A+B) = 2,9 + 1,8$.

Q2) Calculer la distribution du chiffre d'affaire mensuel total des deux biens. (1 point)

$S = A+B$. La distrubution jointe est:

$A \setminus B$	1	2	3	Marginale de A
2	S=3 0,28	S=4 0,28	S=5 0,14	0,7
5	S=6 0,12	S=7 0,12	S=8 0,06	0,3
Marginale de B	0,4	0,4	0,2	1

Q3) En déduire la fonction de répartition, le mode et la médiane. Commentez. (1 point)

Exercice 3

Un concessionnaire Renault s'approvisionnent chez trois établissements E1, E2 et E3 qui fournissent cette marque de voiture et qui se partagent ce marché local à parts égales. Selon la réputation de cette maison, il est rare que des consommateurs relèvent des défauts. En effet, le nombre moyen de défauts par pièce est de 1 dans E1, de 2 dans E2 et de 3 dans E3. Les voitures des trois fournisseurs sont stockées en vrac dans le magasin.

Lors de la livraison d'une voiture prise au hasard dans le magasin, l'acheteur s'est rendu compte qu'elle présentait deux défauts.

Q1) Quelle est la probabilité qu'elle soit produite dans l'établissement E2 ? (2 points)

$P(E2/D) = \frac{P(D/E2)\times P(E2)}{P(D/E1)\times P(E1)+P(D/E2)\times P(E2)+P(D/E3)\times P(E3)} = \frac{0{,}2707\times 1/3}{0{,}1839\times 1/3+0{,}2707\times 1/3+0{,}2240\times 1/3}$

Q2) Commentez la tendance de cette probabilité dans le cas où ce concessionnaire décide de réduire ses approvisionnement de moitié chez E2. (2 points)

$P(E2/D) = \frac{P(D/E2)\times P(E2)}{P(D/E1)\times P(E1)+P(D/E2)\times P(E2)+P(D/E3)\times P(E3)} = \frac{0{,}2707\times 2/10}{0{,}1839\times 2/5+0{,}2707\times 2/10+0{,}2240\times 2/5}$

Exercice 4

Parmi 537 étudiants de DEUG Sciences Economiques dont 304 sont inscrits en première année, on choisit au hasard 10 personnes pour monter une association.

X est le nombre d'étudiants de première année parmi les 10 personnes choisies.

Q1) Définir la loi de X. (1 point)

$X \sim Hyp(N = 537, n = 10, p = 304/537) \longrightarrow_{N>>10n} X \approx Bin(n, p))$

Q2) Calculer la probabilité qu'il y ait, dans les 10 choisis, 5 étudiants de première année. (1 point)

Calculer avec la loi Hyp et la table de la loi Bin.

Q3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)

Application des formules Cf. Cours.

Exercice 5

Un fabricant livre des articles pouvant présenter des défauts. Le nombre de défauts par article suit une loi de Poisson de paramètre m.

Q1) On veut que la probabilité d'avoir plus de deux défauts sur un article soit d'environ 2%. Calculer la valeur de m. (2 points)

$P(X > 2) = 2\% \Leftrightarrow P(X \leq 2) = 98\% \Leftrightarrow m = 0,6$ dans la table.

Q2) On considère un lot de cent articles respectant cette condition. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quatre articles ayant plus de trois défauts. (2 points)

$n = 100$, $p = P(X > 3) = 0,0034$ $Y =$ Le nombre d'articles respectant cette condition. $Y \sim Bin(100; 0,0034) \approx Poisson(0,34) \Rightarrow P(X \leq 4) \simeq 1$.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE FEVRIER 1998-2
A. NASSIRI
Durée = 3 heures
Attention : Une bonne présentation de la copie sera récompensée ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de préciser le numéro de la question dans vos réponses

Question de cours

Dans quelles conditions est-il possible d'approximer une loi hypergéométrique par une loi binomiale et une loi binomiale par une loi de Poisson. (2 points)

Exercice 1

On choisit 3 boules parmi 10 dont 5 sont noires. On définit trois événements :
A : Obtenir une seule boule noire,
B : Obtenir 2 boules noires seulement,
C : Toutes les boules sont noires.
Q1) Calculer la probabilité de réalisation de chaque événement. (1 point)
Q2) Représenter graphiquement ces trois évènements. Que peut-on en dire ? (1 point)
Q3) Calculer la probabilité des événements : $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$. (1 point)
Q4) Si au moins un des événements se réalise, le gain est de 10 F ;
si seulement un événement se réalise, le gain est de 20 F ;
si seulement deux événements se réalisent, le gain et de 15 F.
Quel est le gain le plus probable ? (1 point)

Exercice 2

Le tableau suivant retrace les ventes mensuelles de deux biens A et B (en million de F).

Bien B \ Bien A	1	2	3
2	0.20	0.30	0.50
5	0.50	0.40	0.10

Q1) De quelle distribution s'agit-il dans ce tableau (jointe, marginale ou conditionnelle) ? Interpréter ces données. (1 point)

Q2) Nous savons par ailleurs que les ventes du bien B sont équiprobables. Calculer la distribution jointe des ventes mensuelles des deux biens. (2 point)

Q3) En déduire la distribution du chiffre d'affaire mensuel total, sa fonction de répartition, son mode et sa médiane. Commentez. (1 point)

Exercice 3

Une population contient une proportion p de tricheurs aux cartes. On suppose qu'un tricheur est capable de tirer un as à tous les coups. Un individu est choisi au hasard.

Q1) Quelle est la probabilité qu'il tire un as dans un jeu de 52 cartes ? (2 points)
Q2) Commentaire. (1 points)

Exercice 4

On a besoin de 5 étudiants pour s'occuper de l'organisation d'une association, sauf que sur les 200 personnes inscrites, la moitié refuse de s'y engager.

X est le nombre d'étudiants choisis qui acceptent cet engagement. Q1) Définir la loi de X. (1 point)

Q2) Calculer la probabilité que toutes les personnes choisies acceptent de s'occuper de l'association. (1 point)

Q3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)

Exercice 5

Un fabricant livre des articles pouvant présenter des défauts. Le nombre de défauts par article suit une loi de Poisson de paramètre m.

Q1) On veut que la probabilité d'avoir plus de deux défauts sur un article soit supérieure à 4%. Calculer la valeur de m. (2 points)

Q2) On considère un lot de cent articles respectant cette condition. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quatre articles ayant plus de deux défauts. (2 points)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE JUIN 1998
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours

Quelles sont les propriétés d'un bon estimateur ? (Application à la moyenne) (2 points)

Exercice 1 (Réf. G. Pupion (1993) Statistiques, Dunod)

X est une variable aléatoire positive caractérisée par une fonction de densité $f_X(.)$ continue sur $I\!R^+$:

$$f_X(x) = 2bx \exp(-bx^2), x \geq 0$$

1) Pour quelles valeurs de b, $f_X(.)$ est une densité de probabilité ? (1 point)

2) Soit Y une variable aléatoire positive telle que $Y = X^2$. Démontrer que Y suit une loi exponentielle de paramètre b. En déduire sa moyenne et sa variance. (2 points)

3) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff, trouver un minorant de la probabilité : $Pr(-\frac{1}{2} < Y < \frac{5}{2})$ puis retrouver sa valeur exacte à l'aide de la loi de Y. (2 points)

Exercice 2

Deux équipes E_1 et E_2, de deux personnes chacune, sont en compétition pour gagner une course de 200 mètres. Les membres de chaque équipe se relayent et chacun parcourt une distance de 100 mètres. Soit T_i le temps fait par le $i^{\text{ème}}$ coureur. On suppose que c'est une variable aléatoire continue qui suit une loi normale de moyenne μ_i et de variance σ_i^2 :

$$T_i \sim N(\mu_i, \sigma_i), \quad f(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t_i - \mu_i}{\sigma_i}\right]^2\right), t_i \in I\!R$$

Sachant que toute combinaison linéaire de lois normales est une loi normale, calculer :

1) la densité de la loi de probabilité du temps réalisé par chaque équipe ; (1 point)

2) la probabilité que E_1 gagne, p, en fonction des moyennes et des variances.(2 points)

3) Calculer la valeur de p dans le cas où tous les coureurs ont la même durée moyenne pour parcourir cent mètres. Interpréter. (1 point)

Exercice 3

X est une variable aléatoire positive dont la densité $f(x; \alpha)$ s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu positif α : $f(x) = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{2}{\alpha}x}$, avec $x > 0$ et $\alpha > 0$. On se propose d'estimer α à partir d'une observation $(x_1, ..., x_n)$ qui est une réalisation d'un échantillon de taille n $(X_1, ..., X_n)$ de la loi définie ci-dessus.

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)
2) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre α, noté $\hat{\alpha}_{MV}$. (2 points)
3) $\hat{\alpha}_{MV}$.est-il un estimateur sans biais du paramètre α ? (2 points)
4) Calculer la variance de $\hat{\alpha}_{MV}$. Que peut-on en déduire ? (2 points)

Exercice 4

Une entreprise de location de voitures s'intéresse au temps que ses véhicules passent en réparation. En consultant les fiches d'entretien de neuf voitures, on constate les informations suivantes relatives au nombre de jours d'immobilisation au garage de chaque voiture : $15, 11, 19, 24, 6, 18, 20, 15, 18$. En supposant que les périodes de réparation suivent une loi normale, trouver un intervalle de confiance à 95% pour la durée moyenne d'immobilisation d'une voiture. (2 points)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPTEMBRE 1998
A. NASSIRI
Durée = 3 heures
(Aucun document n'est autorisé)
Attention : Une bonne présentation de la copie sera récompensée ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de préciser le numéro de la question dans vos réponses

Question de cours

La loi des grands nombres : énoncé, application, interprétation. (2 points)

Exercice 1

Durant le Mondial 98, le nombre de buts marqués dans un match est passé de 1/2 à 3 en moyenne. Les joueurs attribuent ce résultat au changement des règles du jeux. Qu'en pensez-vous si l'on suppose que " marquer un but dans une coupe du monde " est un événement rare. (2 points)

Exercice 2

Deux joueurs A et B sont en compétition. Le joueur A lance simultanément 2 dés bien équilibrés et continue ses lancers tant que les dés ne donnent pas des faces paires. Autrement dit, il s'arrête de lancer les dés quand il obtient deux faces paires.

Q1) Quelle est la probabilité que le joueur A réalise n lancers ? (2 points)

Le joueur B joue avec deux pièces de monnaie et continue de les lancer simultanément tant qu'il n'obtient pas la même face " PILE ".

Q2) Quelle est la probabilité que le joueur B réalise m lancers ? (1 point)

Q3) Pour que l'un des deux joueurs gagne, il faut qu'il fasse moins de lancers que l'autre. Pensez-vous que cette compétition est bien équilibrée entre les deux joueurs A et B ? (sans faire de calculs supplémentaires) (1 point)

Exercice 3

Une entreprise de distribution sert d'intermédiaire entre deux fournisseurs, $F1$ et $F2$, et deux clients, $C1$ et $C2$, d'un même bien Q. Les livraisons des deux fournisseurs reçues par cette entreprise sont mélangées et les stocks sont constitués de deux fois plus de pièces de $F1$ que de pièces de $F2$. Le responsable du service après-vente de cette entreprise constate que les retours à l'atelier se font une fois sur quatre. Il sait aussi que parmi le lot des pièces retournées, 1 sur 3 a été fournie par $F1$ et 2 sur 3 par $F2$.

Le client $C1$ achète une seule pièce.

Q1) Calculer la probabilité que :

a) $C1$ retourne au service après vente une pièce fournie par $F1$ (1/2 point)
b) $C1$ retourne au service après vente une pièce fournie par $F2$ (1/2 point)
c) $C1$ retourne la pièce au service après vente ou achète une pièce fournie par $F1$ (1 point)

Q2) A supposer que la pièce achetée par $C1$ soit fournie par $F1$, quelle est alors la probabilité que $C1$ la retourne au service après vente ? (1 point)

Le client $C2$ achète aussi une seule pièce. On suppose qu'il y a indépendance totale entre les deux clients. On considère événement :

F_{ij} : le client C1 achète une pièce fournie par le fournisseur i, et le client $C2$ achète une pièce fournie par le fournisseur j, $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$.

On considère aussi les événements suivants :
R : les deux clients, C1 et C2, ont retourné leur pièces au service après vente.
M : les deux clients ont acheté des pièces fournies par le même fournisseur.

Q3) Calculer :
a) la probabilité de l'événement R : $Pr(R)$; (1 point)
b) la probabilité des quatre événements, F_{ij} : $Pr(F_{ij})$, $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$ (2 points)
c) la probabilité de l'événement M : $Pr(M)$; (1/2 point)

Exercice 4

On se propose d'étudier les pertes de productivité, $P_i, i = 1, .., n$, d'un groupe de n ouvriers pris au hasard dans une usine qui fabrique un certains bien donné. On suppose que la perte de productivité d'un ouvrier i est fonction du temps T_i qu'il passe à fabriquer une unité de ce bien. Cette fonction est linéaire du type $P_i = aT_i$, a est un paramètre réel connu.

Q1) Quelle interprétation (économique) peut-on donner à cette fonction ?

Que pensez-vous du signe du paramètre a ? (1/2 point)

On suppose que T_i suit une loi exponentielle de paramètre positif inconnu, b, que l'on cherche à estimer.

Q2) Calculer $E(t)$. (1/2 point)

Q3) Calculer la loi de P_i. (1 point)

Q4) Déduire $E(P)$ en fonction de $E(T)$ (1/2 point)

Q5) Comment peut-on interpréter le paramètre a ? (1/2 point)

Suite à cette formulation statistique du problème, on procède à une enquête auprès des 10 ouvriers et on relève les temps faits par ces ouvriers (en minutes): 15, 10, 11, 11, 12, 10, 13, 15, 14, 14. On estime par-ailleurs que $\hat{V}(T) = 4$.

Q5) En déduire $V(P)$. (1/2 point)

Q6) Donner l'estimation par maximum de vraisemblance du paramètre b. En déduire une estimation de la perte de productivité moyenne. (1 point)

Q7) En supposant que $a = 1$, calculer l'intervalle de confiance à 5%, puis à 10%, autour de la valeur obtenue pour la perte de productivité moyenne. Pensez-vous qu'il y a trop de perte de productivité dans l'usine

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE FEVRIER 1999
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours (4 points)

Donner un exemple économique concret dont la formalisation nécessite le recours à **l'une** des trois lois suivantes : Binomiale, Poisson, Hypergéométrique. Justifier votre réponse et préciser les conditions d'application de la loi choisie dans votre exemple. (Ne pas dépasser une page)

Exercice 1 (5 points)

Q1) Avec le système d'immatriculation actuel, quel est le nombre maximal (théorique) de voitures que l'on peut immatriculer dans le Finistère ? (2 points)

Rép. : $10^4 26^2$

Q2) On lance trois dés bien équilibrés, quelle est la probabilité d'obtenir deux as et un six ? (2 points)

Rép. : $C_3^1(1/6)^3$

Q3) n personnes autour d'une table. Chaque personne note un nombre confidentiel entre 1 et n sur une feuille. Quelle est la probabilité que chacun donne un nombre différent ? (1 point)

Rép. : $\frac{n!}{n^n}$

Exercice 2 (5 points)

On choisit au hasard 10 étudiants de DEUG psychologie pour un entretien, 304 étudiants sont inscrits en $1^{\text{ère}}$ année et 233 en $2^{\text{ème}}$ année. Soit X le nombre d'étudiants de $1^{\text{ère}}$ année parmi les 10 personnes choisies :

Q1) Calculer la probabilité d'avoir 5 étudiants de $1^{\text{ère}}$ année. (3 points)

Q2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type. (2 points)

Rép. : $X \sim Hyp(537, 10, \frac{304}{537})$

Q1) $Pr(X = 5) = \frac{C_{304}^5 C_{233}^5}{C_{537}^{10}}$

Q2) $E(X) = np = 5,66$ et $V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p) = 2,415$

Exercice 3 (3 points)

Une entreprise utilise trois machines différentes pour fabriquer des arbres de transmission de même diamètre et de même longueur. 40% des arbres sont fabriqués par la machine A, 30% par la machine B et 30% par la machine C. Malgré des réglages fréquents, ces machines produisent des arbres défectueux, compte tenu des normes de fabrication.

Machine	A	B	C
Le nombre moyen de pièces défectueuses	2	4	5

On a prélevé trois arbres au hasard dans la production, et l'on a constaté qu'ils étaient tous défectueux.

Quelle est la probabilité qu'ils aient été fabriqués par :

Q1) la machine A ? (1 point)

Q2) la machine C ? (1 point)

Q3) Commentaire (1 point)

Rép. : $X=$ Nombre de pièces défectueuses.

$P(A) = 0,4$ et $X \sim Pois(2)$		$P(B) = 0,3$ et $X \sim Pois(4)$		$P(C) = 0,3$ et $X \sim Pois($	
$P\Big((X=3)/A\Big)$ $= 0,1804$	$P\Big((X\neq 3)/A\Big)$ $= 1-0,1804$	$P\Big((X=3)/B\Big)$ $= 0,1954$	$P\Big((X\neq 3)/B\Big)$ $= 1-0,1954$	$P\Big((X=3)/C\Big)$ $= 0,1404$	$P\Big((X\neq 3$ $= 1-0,14$
$P\Big((X=3)\cap A\Big)$ $= 0,07216$		$P\Big((X=3)\cap B\Big)$ $= 0,05862$		$P\Big((X=3)\cap C\Big)$ $= 0,04212$	

$$
\begin{aligned}
\text{Q1)} \quad P(A/(X=3)) &= \frac{P\Big((X=3)\cap A\Big)}{P\Big((X=3)\cap A\Big)+P\Big((X=3)\cap B\Big)+P\Big((X=3)\cap C\Big)} \\
&= \frac{P(A)P\Big((X=3)/A\Big)}{P(A)P\Big((X=3)/A\Big)+P(B)P\Big((X=3)/B\Big)+P(c)P\Big((X=3)/C\Big)} \\
&= \frac{0{,}07216}{0{,}1729} \\
&= 0,41735 \\
\text{Q2)} \quad P(C/(X=3)) &= \frac{P\Big((X=3)\cap C\Big)}{P\Big((X=3)\cap A\Big)+P\Big((X=3)\cap B\Big)+P\Big((X=3)\cap C\Big)} \\
&= 0,24361
\end{aligned}
$$

Q3) Effet qualité et effet quantité

Exercice 4 (3 points)

On a 10 entreprises dont chacune est constituée de 2 établissements. Les résultats de ces derniers sont totalement indépendants particulièrement quand il s'agit de deux établissements appartenant à une même entreprise. Suite à une crise économique, quatre établissements ont fait faillite. Calculer la probabilité des événements suivants :

Q1) A : " Deux entreprises ont disparu ". (1 point)

Q2) B : " Au moins une entreprise a disparu ". (1 point)

Q3) C : " Une seule entreprise a disparu ". (1 point)

Rép.:

Q1) $\frac{C_{10}^2}{C_{20}^4} = 0,009$

Q2) $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{20*18*16*14}{20*19*18*17} = 1 - 0,69 = 0,31$

Q3) $P(c) = P(B) - P(A) = 0,301$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE FEVRIER 1999
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours (4 points)

Rappeler les deux définitions des probabilités. Vous pouvez vous aider d'un exemple. (Ne pas dépasser une page)

Exercice 1 (4 points)

Q1) Avec le système d'immatriculation actuel, quel est le nombre maximal (théorique) de voitures que l'on peut immatriculer dans la région Bretagne ? (2 points)

Rép. : $10^4 26^2$

Q2) n personnes autour d'une table. Chaque personne note un nombre confidentiel entre 1 et n sur une feuille. Quelle est la probabilité qu'ils donnent tous le même nombre ? (2 points)

Rép. :$n * \left(\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2 (4 points)

Un fabricant livre des articles pouvant présenter des défauts. Le nombre de défauts par article suit une loi de Poisson de paramètre m.

Q1) On veut que la probabilité d'avoir plus de trois défauts sur un article soit d'environ $14,29\%$. Calculer m. (2 points).

Rép. : X le nombre de défauts par article : $P(X > 3) = 0,1429 \Leftrightarrow P(X \leq 3) = 0,8571 \Leftrightarrow m = 2$ dans la table.

Q2) On considère un lot de cent articles respectant cette condition. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quatre articles ayant plus de trois défauts ? (2 points)

Rép. : Y le nombre d'articles qui présentent cette condition : $Y \sim Bin(n = 100, p = 0,1429)$ avec

$$P(Y > 4) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} C_{100}^k p^k (1-p)^{100-k}$$

Exercice 3 (4 points)

Une population contient une proportion p de fumeurs. On suppose qu'un fumeur court sûrement le risque d'un cancer et d'en mourir. Aussi, on suppose que ce risque est seulement de 10% chez les non-fumeurs. On choisit au hasard une personne.

Q1)Quelle est la probabilité qu'elle meurt d'un cancer ? (2 points)

Q2) Discuter l'évolution de ce risque de mortalité en fonction des comportements liés au Tabac. (2 points)

Rép. :

Exercice 4 (4 points)

Pendant une année de crise, sur 10 jeunes entreprises totalement indépendantes, 6 entreprises se sont révélées particulièrement vulnérables et n'ont pas survécu. L'année suivante, 100 nouvelles entreprises ont vu le jour. Supposons que la même crise réapparaît dans les mêmes conditions. Calculer la probabilité des événements suivants :

Q1) A : " Deux entreprises ont disparu ". (1 point)

Q2) B : " Au moins une entreprise a disparu ". (2 points)

Q3) C : " Une seule entreprise a disparu ".(1 point)

Rép.:

1) $\frac{C_{10}^2}{C_{20}^4} = 0,009$

2) $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{20*18*16*14}{20*19*18*17} = 1 - 0,69 = 0,31$

3) $P(c) = P(B) - P(A) = 0,301$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
Examen de Fevrier 1999
A. Nassiri
Durée = 3 heures
Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours

Donner un exemple économique concret dont la formalisation nécessite le recours à l'une des trois lois suivantes : Binomiale, Poisson, Hypergéométrique. Justifier votre réponse et préciser les conditions d'application de la loi choisie dans votre exemple. (Ne pas dépasser une page) (2 points)

Exercice 1

Q1) Quelle est la capacité (théorique) du réseau téléphonique du Finistère ?(1 point)

Rép. :

$C_1^1 = "0"$	$C_1^1 = "2"$	$C_1^1 = "9"$	$C_1^1 = "8"$	C_{10}^1	C_{10}^1	C_{10}^1	C_{10}^1	C_{10}^1	C_{10}^1

Cas possibles=10^6

Q2) Combien de mots d'au plus deux lettres peut-on former avec deux lettres prises au hasard dans un alphabet à dix lettres ? (1 point)

Rép. :

* Un alphabet de 10 lettres $\longrightarrow$ 2 letttes :
- Avec répétition et sans ordre : $C_{10}^2 + 10$
- Sans répétition et sans ordre : C_{10}^2

L'énoncé "tirer deux lettres dans un alphabet de 10" suppose que les deux lettres sont différentes. Cas possibles : C_{10}^2.

* Chaque couple nous sert à former un mot d'au plus de 2 lettres :
- Mots d'une lettre : 2^1
- Mots de deux lettres (la lettre peur se rététer dans le mot): 2^2

Solution : $C_{10}^2 \times (2^1 + 2^2)$

Q3)4 joueurs lancent chacun un dé à six faces bien équilibrées. Combien y-a-t-il de résultats possibles ? (1 point)

Rép. :

6	6	6	6

Cas possibles : 6^4

Q4) Combien de résultats différents peuvent être obtenus par ces quatre joueurs dans la question Q3 ? (1 point)

Rép. :

6	5	4	3

A_6^4

Q5) On lance trois dés bien équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir deux as et un six ? (1 point)

Rép. : $C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^3$

Exercice 2

Dans une population de 100 personnes, on relève trois facteurs d'hétérogénéité qui sont totalement indépendants : le sexe avec autant de femmes que d'hommes, 10 catégories socio-professionnelles équiprobables, et 4 états matrimoniaux uniformément représentés.

Q1) Combien y-a-t-il de groupes combinés ? (0,5 point)

Rép. : 2 Sexes $*$ 10 CSP $*$ 4 Etats Mat.

On définit deux familles d'événements $\{A, B, C\}$ et $\{D, E, F\}$ de la manière suivante :

A : Homme
B : Homme de catégorie 1 ou 2
C : Personne mariée
D : Femmme
E : Femme mariée
F : Femme de catégorie 1 ou 2

Q2) Que peut-on dire des deux familles d'événements ? (Dans votre réponse, insister sur les relations d'indépendance, d'incompatibilité ou d'inclusion entre les événements des deux familles) (1,5 point)

Q3) Calculer la probabilité des événements : $A, B, C, D, E, F, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C, A \cup (D \cap E)$ (2 points)

Exercice 3 (Calot p. 124-125)

Dans un magasin se trouvent trois lots de pièces identiques dont les proportions de pièces défectueuses sont 5%, 8% et 10%. Les étiquettes précisant la qualité des lots ont été perdues.

On prélève, dans l'un des lots choisi au hasard, un échantillon de 10 pièces avec remise et on constate que, parmi ces 10 pièces, 4 sont défectueuses. Quelle est la probabilité que ce lot contienne 5% de pièces défectueuses ?

On définit les événements suivants :
A1 : "le premier lot : celui qui contient 5% de pièces défectueuses"
A2 : "le second lot : celui qui contient 8% de pièces défectueuses";
A3 : "le dernier lot : celui qui contient 10% de pièces défectueuses"
B2 : "2 pièces défectueuses parmi les 10 choisies".

Rép. :

B:"4 pièces défectueuses parmi 10".

$$\begin{cases} A_1 & P(A_1) = 1/3, \\ A_2 & P(A_2) = 1/3, \\ A_3 & P(A_3) = 1/3 \end{cases} \begin{cases} A_1 & X_1 \sim Bin(10; 5\%) \Rightarrow P(B/A_1) = 0,001 \text{ cf. Table de la loi Bin,} \\ A_2 & X_2 \sim Bin(10; 8\%) \Rightarrow P(B/A_2) = 0,0052 \text{ cf. Table de la loi Bin,} \\ A_3 & X_3 \sim Bin(10; 10\%) \Rightarrow P(B/A_3) = 0,0112 \text{ cf. Table de la loi Bin,} \end{cases}$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \times P(B/A_1)}{P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + P(A_3) \times P(B/A_3)} = \frac{0,001}{0,0174} = 0,057$$

Exercice 4

Soit un portefeuille composé d'actions de trois différentes entreprises que l'on représente par trois variables aléatoires : X, Y et Z. Au cours des trois dernières années, la valeur de ces actions a évolué. On relève les deux tableaux suivants concernant l'évolution temporelle de la valeur moyenne et de l'écart type de chaque action.

Evolution temporelle de la valeur moyenne et de l'écart type de chaque action

Action	X		Y		Z	
Année	Moyenne	Ecart type	Moyenne	Ecart type	Moyenne	Ecart type
1996	2	2	4	1	1	0
1997	3	2	3	2	2	1
1998	5	3	6	3	1	1

On suppose que l'on peut mesurer le risque par la variance et le gain moyen par l'espérance mathématique.

Q1) Comparer les différentes actions au vu de leur niveau de risque et de gain moyen. (2 points)

$$\begin{cases} E(X) = 10/3 \\ E(Y) = 13/3 \\ E(Z) = 4/3 \end{cases}$$

Z est l'action qui a le plus faible gain moyen. Son niveau de risque est aussi le plus faible en moyenne, avec un risque moyen des trois années de 2/3.

Y est l'action qui a le gain moyen (13/3) et le niveau de risque (14/3) les plus élevés des trois actions.

X occupe une situation intermédiaire au vu de son gain moyen (10/3), alors qu'elle présente le niveau de risque le plus élevé (17/3).

$$\begin{cases} \text{Gain moyen} & Z < X < Y \\ \text{Risque} & Z < Y < X \end{cases}$$

Q2) Quelle serait la valeur annuelle du gain moyen et du risque d'un portefeuille composé d'un nombre égal des trois actions ? Commentaire. (2 points)

$P = X + Y + Z.$

	Moyenne	Variance
96	7	5
97	8	9
98	12	19

$$\begin{cases} E(P) = E(X) + E(Y) + E(Z) \\ V(P) = V(X) + V(Y) + V(Z) \end{cases}$$

Le gain moyen augmente parallèlement au niveau du risque. Le risque (la variance) augmente à un rythme plus rapide à cause du poids des actions de X et de Y qui sont les plus risquées.

Q2) Quel serait le résultat de la question Q2) si l'on doublait la quantité de l'action X ? Commentaire (1 points)

$P = 2X + Y + Z.$

	Moyenne	Variance
96	8	17
97	11	21
98	17	91

$$\begin{cases} E(P) = 2 * E(X) + E(Y) + E(Z) \\ V(P) = 4 * V(X) + V(Y) + V(Z) \end{cases}$$

Le gain moyen est plus élevé, mais le risque atteint des niveaux incontrôlables.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE JUIN 1999
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours

Donner un exemple concret sur l'inférence statistique. (2 points)

Exercice 1 : (Réf. Lecoutre et alii (1997) Dunod)

Soit U une v.a normale centrée et réduite.
1) Calculer $Pr(U < -2)$, $Pr(-1 < U < 0,5)$ et $Pr(4U \geq -3)$ (1 point)
2) Déterminer a et b tels que : $Pr \mid U \mid < a) = 0,82$ et $Pr(U < -b) = 0,61$ (1 point)

Exercice 2

X est une variable aléatoire positive dont la densité $f(x)$ s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu positif α :

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}x} \text{ avec } x > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (2 points)
Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = X^2$.
2) Donner une approximation de la moyenne et de la variance de Y (Procédé de linéarisation) (2 points)
3) Calculer la densité de Y : $g(y)$ (2 points)
4) En déduire les vraies moyenne et variance de Y. Commentaire. (2 points)

Exercice 3

X est une variable aléatoire positive caractérisée par une fonction de densité

$$f(x) = \frac{x^3}{6\alpha^4} e^{-\frac{x}{\alpha}}, x > 0$$

α est un paramètre positif inconnu que l'on se propose d'estimer à l'aide d'un échantillon de n observations i.i.d : $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$
1) Pour quelles valeurs de α, $f(.)$ est une densité de probabilité ? (1 point)
2) Calculer $E(X)$. (1 point)
3) Calculer $\hat{\alpha}_{MV}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de α. (2 points)
4) $\hat{\alpha}_{MV}$ est-il un estimateur sans biais de α. (1 point)

Exercice 4

Une entreprise de location de voitures s'intéresse au temps que ses véhicules passent en réparation. En consultant les fiches d'entretien de neuf voitures, on constate les informations suivantes relatives au nombre de jours d'immobilisation au garage de chaque voiture : $2, 15, 5, 4, 6, 8, 2, 1, 8$. En supposant que les périodes de réparation suivent une loi normale, trouver un intervalle de confiance à 95% pour la durée moyenne d'immobilisation d'une voiture. (3 points)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPTEMBRE 1999 1 SEM
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Question de cours

Quelle est la différence entre la trois lois suivantes : Binomiale, Poisson et Hypergéométrique. (Ne pas dépasser une page) (2 points)

Exercice 1

Q1) Quelle est la capacité (théorique) du réseau téléphonique en France ? (1 point)

Q2) Trois joueurs lancent chacun un dé à six faces bien équilibrées. Combien y t il de résultats possibles ? (1 point)

Q3) Combien de résultats différents peuvent être obtenus par ces trois joueurs dans la question Q2 ? (1 point)

Q4) On lance quatre dés bien équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir trois as et un six ? (1 point)

Exercice 2

Dans un magasin se trouvent trois lots de pièces identiques dont les proportions de pièces défectueuses sont 1%, 10% et 15%. Les étiquettes précisant la qualité des lots ont été perdues.

On prélève, dans l'un des lots choisi au hasard, un échantillon de 10 pièces avec remise et on constate que, parmi ces 10 pièces, 3 sont défectueuses. Quelle est la probabilité que ce lot contienne 10% de pièces défectueuses ?

On définit les événements suivants :
A1 : "le premier lot : celui qui contient 1% de pièces défectueuses";
A2 : "le second lot : celui qui contient 10% de pièces défectueuses";
A3 : "le dernier lot : celui qui contient 15% de pièces défectueuses";
B2 : "3 pièces défectueuses parmi les 10 choisies".

Rép. : $B = P(X = 3)$ avec X le nombre de pièces défectueuses parmi les 10 tirées avec remise.

$P(A_2) = \frac{1}{3}$ et $X \sim Bin(10; 1\%)$		$P(A_2) = \frac{1}{3}$ et $X \sim Bin(10; 10\%)$		$P(A_3) = \frac{1}{3}$ et $X \sim Bin(10; 15\%)$	
$P\Big(B/A_1\Big)$ $= 0,000118$	$P\Big(\bar{B}/A_1\Big)$ $= 1 - 0,000118$	$P\Big(B/A_2\Big)$ $= 0,05739$	$P\Big(\bar{B}/A_2\Big)$ $= 1 - 0,05739$	$P\Big(B/A_3\Big)$ $= 0,12983$	$P\Big(\bar{B}/A_3\Big)$ $= 1 - 0,12983$

$$P\Big(A_2/B\Big) = \frac{P(A_2)P\Big(B/A_2\Big)}{P(A_1)P\Big(B/A_1\Big) + P(A_2)P\Big(B/A_2\Big) + P(A_3)P\Big(B/A_3\Big)} = \frac{0,05739}{0,000118 + 0,05739 + 0,12983} = 0,30634$$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPTEMBRE 1999 2D SEM
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Question de cours

Quelles sont les qualités d'un bon estimateur ? (2 points)

Exercice 1: (Réf. Lecoutre et alii (1997) Dunod)

Soit Y une v.a normale telle $Pr(Y < 3) = Pr(Y \geq -1) = 0,8413$. Calculer $Pr(0 < Y < 1)$. (2 points)

Exercice 2 (Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev)

X est une variable aléatoire positive caractérisée par une fonction de densité $f(.)$ continue sur l'intervalle $[-1,1]$:

$$f(x) = \frac{1}{4} - ax^2 \text{ Si } x \in [-1,1]$$

1) Déterminer le réel a pour que $f(x)$ soit une fonction de densité. (1 point)
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)
3) Déterminer un intervalle I de centre O et de longueur $2l$ tel que : $Pr(X \in I) \geq 0,75$ (1 point)

Exercice 3

X est une variable aléatoire positive dont la densité $f(x;\alpha)$ s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu positif α :

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}x} \text{ avec} x > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

On se propose d'estimer α à partir d'une observation $(x_1, ..., x_n)$ qui est une réalisation d'un échantillon de taille n $(X_1, ..., X_n)$ de la loi définie ci-dessus.

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)
2) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre α, noté $\hat{\alpha}_{MV}$. (1 point)
3) $\hat{\alpha}_{MV}$,est-il un estimateur sans biais du paramètre α ?(1 point)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE JUIN 2000
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et la réponse exacte de chacune des questions suivantes (1 point par question).

N	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau deconfiance donné et une taille d'échantillon donnée, longueur d'un intervalle de confiance bilatéral symétrique est fixe.		
Q2	La moyenne empirique est un estimateur biaisé de la moyenne d'une loi.		
Q3	La variance empirique S_n^2 est le meilleur estimateur de la variance d'une loi.		

Exercice 1, (Réf. J.P Lecoutre (2000) Dunod P.42) (2 points)

Calculer l'espérance et la variance d'une v.a X de loi normale telle que :

$$\begin{cases} Pr(X > -3) = 0,6915, \\ Pr(X < 2) = 0,9772. \end{cases}$$

Exercice 2 : (Réf. J.P Lecoutre (2000) Dunod P.44) (4 points)

Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$$

Où a est un nombre positif donné. Calculer la fonction de densité et de répartition de $Y = -ln(X)$. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice 3 : (Réf. J.P Lecoutre (2000) Dunod P.43)

Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x-a)}, \text{ si } x > a \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$$

Où a est un nombre réel donné.

1) Déterminer la fonction de répartition de X et la médiane de cette loi. (2 points)

2) Soit Y une autre v.a indépendante de même loi que X. Posons $Z = min(X, Y)$, déterminer la fonction de répartition puis de densité de Z. (2 points)

Exercice 4: (Réf. J.P Lecoutre (2000) Dunod P.76)

Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+3x^2), \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)
2) Déterminer un intervalle I de centre 0 et de longueur $2l$ tel que $Pr(X \in I) \geq 0,75$. (1 point)

Exercice 5: (Réf. J.P Lecoutre (2000) Dunod P.111)

Le chiffre d'affaires moyen d'un commerçant, calculé sur les trente derniers jours, est de 2000 (Francs), avec un écart type empirique de valeur $S_{(n-1)} = 300$ (Francs). On admet que son chiffre d'affaires quotidien peut-être représenté par une v.a X de loi normale d'espérance μ et d'écart type σ inconnus.

1) Donner un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour le paramètre μ. (2 points)
2) Obtient-on le même intervalle si σ est connu, de valeur 300. Commentaire.(3 points)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPT 2000 1 SEM
A. NASSIRI
Durée = 3 heures
Attention : Une bonne présentation de la copie sera récompensée ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de préciser le numéro de la question dans vos réponses

Question de cours toto

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et seulement la réponse de chacune des questions suivantes (Ne donner aucune argumentation). (1 point par question).

N^0	Question	Vrai	Faux
Q1	La loi de Binomiale est la loi des événements rares		×
Q2	Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	×	
Q3	Si deux événements sont incompatibles alors ils sont indépendants		×

Exercice 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$ et $Pr(A \cap B) = 1/8$. Calculer le probabilité de:

Q4) E : " au moins l'un de ces événements se produit " (2 points)
Q5) F : " un seul de ces événements se produit " (2 points)

Rep. : $P(E) = P(A \cup B) = 1/4 + 2/3 - 1/8 = 19/27$
$P(F) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 2/3$

Exercice 2

Un étudiant doit répondre à quatre questions à choix multiple où trois réponses sont proposées à chaque fois, une seule étant correcte.

Q1) Dans le cas où l'étudiant répond au hasard et de façon indépendante à chaque question, calculer la probabilité qu'il donne plus de réponses justes que fausses. (1 point)

Rep. : X : Nombre de réponses justes: $X \sim Bin(4; 1/3)$. $P(X \geq 3) = Pr(X = 3) + P(X = 4) = 9/81$.

Q2) Que devient cette probabilité s'il n'y a que deux réponses possibles à chaque question ? (1 point)

Rep. : $X \sim Bin(4; 1/2)$. $P(X \geq 3) = Pr(X = 3) + P(X = 4) = 5/16$.

Exercice 3

On classe les gérants de portefeuille en deux catégories : ceux qui sont bien informés et ceux qui ne le sont pas. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, la probabilité que le cours de celle-ci monte est de 80%. Dans le cas d'un gérant mal informé, cette probabilité ne vaut que 50%. Si l'on choisit au hasard un gérant dans un annuaire professionnel, la probabilité qu'il soit bien informé est de 20%. Calculer la probabilité que le gérant ainsi choisi soit mal informé, sachant que la valeur qu'il a achetée a monté.

$P(I) = 0,2$		$P(\bar{I}) = 0,8$	
$P\big(A/I\big) = 0,8$	$P\big(\bar{A}/I\big) = 0,2$	$P\Big(A/\bar{I}\big) = 0,5$	$P\big(\bar{A}/\bar{I}\big) = 0,5$

$$P\big(\bar{I}/A\big) = \frac{P(\bar{I} \cap A)}{P(I \cap A) + P(\bar{I} \cap A)} = \frac{0,8 * 0,5}{0,8 * 0,5 + 0,2 * 0,8} = 40/56$$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco

EXAMEN DE SEPT 2000 $2^{\text{ÈME}}$ SEM

A. NASSIRI

Durée = 3 heures

Attention : Une bonne présentation de la copie sera récompensée ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de préciser le numéro de la question dans vos réponses

Question de cours

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et seulement la réponse de chacune des questions suivantes (Ne donner aucune argumentation). (1 point par question).

N^0	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau de confiance donné et une taille d'échantillon donnée, la longueur d'un intervalle de confiance bilatéral symétrique est fixe.		
Q2	La moyenne arithmétique est un estimateur sans biais de la moyenne		
Q3	La variance empirique S^2_{n-1} est le meilleur estimateur de la variance d'une loi		

Exercice 1

Soit Y une v. a. normale telle que $Pr(Y < 3) = Pr(Y \geq -1) = 0,8413)$. Calculer $Pr(0 < Y < 1)$. (1 point)

Exercice 2

Soit X une v. a. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\theta^2} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où θ est un nombre positif donné.

Q1) Calculer la valeur de a. (1 point)

Q2) Déterminer la fonction de répartition de X. (1 point)

Q3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 point)

Exercice 3

X est une variable aléatoire positive dont la densité $f(x;\alpha)$ s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu positif α :

$$f(x;\alpha) = \alpha e^{-\alpha x} \text{ avec } x > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

On se propose d'estimer α à partir d'une observation $(x_1, ..., x_n)$ qui est une réalisation d'un échantillon de taille n $(X_1, ..., X_n)$ de la loi définie ci-dessus.

Q1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.(1 point)

Q2) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre α , noté $\hat{\alpha}_{MV}$. (1 point)

Q3)$\hat{\alpha}_{MV}$, est-il un estimateur sans biais du paramètre α ? (1 point)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE FEVRIER 2001
A. NASSIRI
Durée = 3 heures
Il sera tenu compte de la bonne présentation de la copie. N'oubliez pas de préciser le numéro de la question dans vos réponses

Question de cours

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et seulement la réponse de chacune des questions suivantes (Ne donner aucune argumentation). (1 point par question).

N^0	Question	Vrai	Faux
Q1	La loi de Poisson est la loi des événements rares	$*$	
Q2	Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$		$*$
Q3	Si deux événements sont incompatibles alors ils sont indépendants		$*$

Exercice 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$ et $Pr(A \cap B) = 1/8$. Calculer le probabilité de:

Q4) E : " au moins l'un de ces événements se produit " (2 points)
Q5) F : " un seul de ces événements se produit " (2 points)

Exercice 2

Combien de pièces de monnaie (non truquées) doit-on jeter pour que la probabilité d'obtenir (en un seul jet) au moins une fois pile soit supérieure à 90% ? (2 points)

Exercice 3

Considérons les trois tableaux suivants et supposons qu'ils concernent une population au chômage composée d'hommes et de femmes appartenant à quatre classes d'âge.

Tableau $n^0 1$				
Y X	15 à 24 ans	25 à 34 ans	35 à 49 ans	50 et plus
Hommes	63,3 %	3,2 %	4,4 %	3,2 %
Femmes	0,6 %	5,7 %	9,5 %	10,1 %

Tableau $n^0 2$				
Y X	15 à 24 ans	25 à 34 ans	35 à 49 ans	50 et plus
Hommes	85,5 %	4,3 %	6 %	4,2 %
Femmes	2,4 %	22 %	36,6 %	39 %

Tableau $n^0 3$				
Y X	15 à 24 ans	25 à 34 ans	35 à 49 ans	50 et plus
Hommes	99 %	35,7 %	31,8 %	23,8 %
Femmes	1 %	64,3 %	68,2 %	76,2 %

Q6) De quelle distribution s'agit-il dans chacun de ces trois tableaux ? (1 point)

Q7) Interpréter les chiffres en gras des les tableaux. (1 point)

Q8) Qu'en déduisez-vous à propos du cycle professionnel des hommes par rapport à celui des femmes ? (1 point)

Exercice 4

La probabilité qu'une personne prise au hasard se mette à fumer un jour est supposée égale à P. Si l'on suppose aussi que toute personne a une certaine probabilité α de développer un cancer et que ce risque est multiplié par deux chez les fumeurs,

Q9) Quelle serait alors la fréquence des personnes atteintes d'un cancer ? (1 point)

Q10) Quelle serait la probabilité qu'une personne malade d'un cancer ait fumé auparavant ? (1 point)

Q11) Application : $P = 0$, ensuite $P = 1$. Commentaire (2 points)

Exercice 5

Un fabricant livre des articles pouvant présenter des défauts. Le nombre de défauts par article suit une loi de Poisson de paramètre m.

Q12) Pourquoi doit-on retenir une loi de Poisson au lieu des autres lois que vous avez vues en cours ? (1 point)

On a relevé par le passé que la probabilité d'avoir plus de trois défauts sur un article est d'environ 2%.

Q13) Calculer la valeur de m.(1 point)

On considère un lot de cent articles respectant cette condition.

Q14) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quatre articles ayant plus de trois défauts ? (2 points)

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE JUIN 2001
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et la réponse exacte de chacune des questions suivantes (1 point par question).

N	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau deconfiance donné et une taille d'échantillon donnée, la longueur d'un intervalle de confiance bilatéral symétrique n'est pas fixe si la variance n'est pas donnée.		
Q2	La moyenne empirique $\overline{X}_n$ et la variance empirique $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ sont des estimateurs sans biais.		
Q3	L'espérance $E(X)$ est un opérateur linéaire.		

Exercice 1 (2 points)

Calculer l'espérance et la variance d'une v.a X de loi Normale telle que :

$$\begin{cases} Pr(X > -1) = 0,9332, \\ Pr(X < 4) = 0,9938. \end{cases}$$

Exercice 2

Soit Y une v.a de densité $g(y) = \alpha \exp(\alpha y)$ avec $y > 0$ et α un nombre positif donné.

1) Déterminer la fonction de répartition de Y et la médiane de cette loi. (2 points)

2) Soit X une autre v.a indépendante de même loi que Y dont la densité s'écrit $\lambda \exp(-\lambda x)$ avec $x > 0$ et λ un nombre positif donné. Posons $Z = X + Y$, déterminer la fonction de répartition puis de densité de Z. (2 points)

Exercice 3

Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + 3x^2) \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (2 points)

2) Déterminer un intervalle I de centre 0 et de longueur $2l$ tel que $Pr(X \in I) \geq 0,75$. (2 points)

Exercice 4

Une chaîne de distribution a réalisé un chiffre d'affaires moyen de mille francs sur les cent derniers jours, avec un écart type empirique, noté s, de trois cents francs. Supposons que ce chiffre d'affaires quotidien est une v.a, notée X, qui suit une loi Normale d'espérance μ et d'écart type σ inconnus.

1) Calculer l'intervalle de confiance de niveau 0,99 pour le paramètre μ. (2 points)

2) Obtient-on le même intervalle si σ est connu, de valeur $\sigma = 300$. Commentaire. (2 points)

Exercice 5

Le responsable d'une entreprise remarque que la structure du coût de production suit un processus aléatoire qui tourne autour d'une moyenne de 105 F par jour. Il décide alors de changer de procédé de fabrication afin d'améliorer la rentabilité. Au cours d'une période d'essai d'une centaine de jours, il remarque que le coût quotidien du nouveau procédé tourne autour de 100 F avec un écart-type de 10 F.

Que peut-on en déduire ? En d'autres termes, en calculant un intervalle de confiance à 95% pour la distribution des coûts du nouveau procédé de fabrication (2 points), et en le comparant au coût moyen de l'ancien procédé, peut-on affirmer que le nouveau procédé est plus rentable (1 point) ?

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE FEVRIER 2002
A. NASSIRI

QUESTION DE COURS (1 point par question)

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et seulement la réponse (Vrai ou Faux) de chacune des questions suivantes (Ne donner aucune argumentation).

N^0	Question	Vrai	Faux
Q1	$Var(a.x - b.y) = a^2 Var(x) - b^2 Var(y)$		$\times$
Q2	Si deux évènements sont incompatibles alors ils sont dépendants	$\times$	
Q3	Sous certaines conditions, les lois Binomiale et Hypergéométrique tendent vers la loi de Poisson	$\times$	
Q4	Pour que la somme de plusieurs variables de Bernouilli suive une loi Binomiale, il faut que ces variables soient dépendantes entre elles		$\times$

EXERCICE 1

Dans une banque, chaque client possède un compte dont le code est composé de trois lettres suivies de cinq chiffres.

On suppose que les trois lettres sont distinctes. Combien peut-on ouvrir de comptes dont le code:

Q5 : Commence par AB ?
Q6 : Commence par A ?
Q7 : Contient un A ?
Q8 : Commence par A et finit par 123 ?

On suppose que les trois lettres ne sont plus nécessairement distinctes. Combien peut-on ouvrir de comptes dont le code :

Q9 : Commence par A ?
Q 10 : Contient au moins deux A ?

EXERCICE 2

Un individu a remarqué que les contrôles dans les bus se font une fois sur dix. Il prend le bus cinquante fois par mois et subit un certain nombre X de contrôles.

Q 11 : Préciser la loi statistique exacte de X. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Q 12 : Calculer la probabilité $P(X \leq 3)$.

Q 13 :L'individu choisit de frauder et décide de ne plus acheter de ticket qui coûte un euro à l'unité. Quelle amende minimale doit imposer la compagnie pour que le fraudeur ait 74,97 % de risque de se trouver perdant à la fin du mois ?

EXERCICE 3

Une chaîne de distribution s'approvisionne chez trois établissements E1, E2 et E3 qui fournissent le même produit et se partagent ce marché local à parts égales. Selon la réputation de ce produit, il est rare que des consommateurs relèvent des défauts. En effet, le nombre moyen de défauts par unité produite est de 1 dans E1, de 2 dans E2 et de 3 dans E3. Les produits des trois fournisseurs sont stockés en vrac dans le magasin. Lors d'une vente d'un article pris au hasard dans le magasin, l'acheteur s'est rendu compte qu'il présentait deux défauts.

Q 14 : Quelle est la probabilité que cet article soit produit dans l'établissement E2 ?

Q 15 : Commentez la tendance de cette probabilité dans le cas où ce concessionnaire décide de réduire ses approvisionnements de moitié chez E2.

EXERCICE 4

On suppose qu'un demandeur d'emploi continue de passer des entretiens tant qu'il ne trouve pas de travail. En d'autres termes, il arrête de chercher du travail et de passer les entretiens d'embauche au moment où il décroche un emploi. On s'intéresse au nombre moyen d'entretiens que chaque individu , toutes choses égales par ailleurs, doit passer. Ceci renseigne sur la période moyenne que chaque individu " espère " passer en chômage.

Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a que trois offres d'emploi sur le marché, et donc un maximum de trois entretiens à passer. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'entretiens à passer. Soit p la probabilité d'obtenir l'emploi proposé. Pour simplifier les calculs, prenez $p = 1/2$

Q 16 : Rapporter le tableau suivant sur votre copie avec le résultat des probabilités calculées :

$Pr(.)$	Résultat du calcul
$Pr(X = 1)$	
$Pr(X = 2)$	
$Pr(X = 3)$	
$Pr(X > 3)$	

Q 17 : Expliquer la signification de ces quatre probabilités. Quel commentaire en tirez-vous ?

Q 18 : En rappelant les valeurs possibles que peut prendre X, expliquer ce que représente le dernier événement, $(X > 3)$.

Q 19 : Pour simplifier, remplacer ce dernier événement par un autre événement plus simple : $(X = 4)$. Quel commentaire vous inspire cette simplification ?

Q 20 : Calculer alors $E(X)$. Que représente cette quantité ? En formuler un commentaire.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE JUIN 2002
A. NASSIRI
Durée = 3 heures
Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Question de cours

Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et la réponse exacte de chacune des questions suivantes (1 point par question).

N	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau deconfiance donné et une taille d'échantillon donnée, la longueur d'un intervalle de confiance bilatéral symétrique n'est pas fixe si la variance est donnée.		XXX
Q2	La moyenne empirique $\overline{X}_n$ et la variance empirique $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ sont des estimateurs sans biais.		XXX
Q3	Quand les individus sont Identiquement et Indépendamment Distribués l'estimateur du Maximum de Vraisemblance et des Moindres Carrés Ordinaires de l'espérance mathématique donne le même résultat.	XXX	

Exercice 1 (4 points)

Soit X une v.a de fonction de répartition $F(x) = 1 - \exp\left(-\theta x^{\beta}\right)$ avec $x > 0$ et θ et β sont deux nombres positifs donnés.

1) Calculer la fonction de densité de X. (1 point)

2) Donner l'expression, en fonction de et θ et β, des caractéristiques suivantes :

i. L'espérance mathématique (0,5 point)

ii. La variance (0,5 point)

iii. La médiane (0,5 point)

iv. Le quantile d'ordre α (0,5 point)

3) Soit Y une autre v.a telle que $Y = X^{\beta}$. Démontrer que la fonction de densité de Y est de la forme : $g(y) = \theta \exp\left(-\theta y\right)$ (1 point)

Exercice 2 (2 points)

Calculer l'espérance et la variance d'une v.a X de loi Normale telle que :

$$\begin{cases} Pr(X > -5) & = 0,7823 \\ Pr(X < 10) & = 0,9913 \end{cases}$$

Exercice 3 (4 points)

Une entreprise dispose de deux ateliers complètement indépendants, A et B, qui emploient respectivement 100 et 150 salariés. Une enquête a permit de constater que, durant une période T de travail, un employé de l'atelier A est absent pour diverses raisons valables (maladie, formation, ...) avec une probabilité de $1/10$, et un ouvrier de l'atelier B avec une probabilité de $2/10$.

1. Calculer la probabilité pour que toute l'entreprise ait entre 30 et 50 ouvriers absents pendant une même période de travail de longueur T ? (1 point)

2. L'entreprise doit disposer d'une équipe de réserve, des intérimaires, pour qu'elle ne soit pas en situation de manque d'ouvriers sur les chaînes de montage. Trouver le nombre maximum d'intérimaires, K, qu'elle doit embaucher pour faire face à l'absentéisme dans 99 % des cas ? (1 point)

3. Commentaire relatif aux deux questions : En considérant ce nombre d'intérimaires, la probabilité du risque d'absentéisme, et les coûts que cela engendre, pensez-vous que l'entreprise puisse supporter un tel taux d'absentéisme ? (2 points)

Exercice 4 (3 points)

Deux enquêtes ont été réalisées pour estimer la durée moyenne qu'un demandeur d'emploi passe en chômage avant de décrocher un travail.

Fondée sur une centaine de personnes, la première enquête obtient une durée de chômage moyenne de 100 jours, et une variance de 81 jours. La seconde enquête refait la même étude sur une trentaine de personnes appartenant au même bassin d'emploi. Elle obtient la même moyenne de 100 jours, mais un variance de 100 jours.

1) Calculer l'intervalle de confiance de niveau 0,99 pour chaque estimation. (1 points)

2) Que devient cet intervalle de confiance si la seconde entreprise utilise la variance déjà estimée par la première étude. (1 point)

3) Commentaire : Au vu des résultats des deux questions, quelles différences y-t-il entre les résultats des deux enquêtes ? et pourquoi ? (1 point)

EXERCICE 5 (4 points)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la densité de probabilité est définie par $f(x) = \theta\beta x^{\beta-1}\exp(-\theta x^{\beta})$.

Où $x > 0$, θ et β sont deux paramètres réels strictement positifs. On suppose que β est connu, et seul θ est inconnu et doit être estimé.

1) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}}{n}} = \frac{1}{E(X^{\beta})}$$

où $E(X^{\beta})$ est le moment d'ordre β de X. (2 points)

2) Quelles sont les propriétés pour que cet estimateur soit de bonne qualité ? (Expliquer) (2 points)

Corrigé

1. X : Nombre de moteurs de type A p=Probabilité qu'un moteur de type A tombe en panne $X \sim Bin(n, p)$ n=100, p=0,1. On peut approximer cette loi discrète par une loi Normale E(X)=100 * 0,1 = 10 V(X) = 100 * 0,1 * 0,9 = 9 $X \sim N(10, 9)$

Y : Nombre de moteurs de type B p=Probabilité qu'un moteur de type A tombe en panne $Y \sim Bin(n, p)$ n=150, p=0,2. On peut approximer cette loi discrète par une loi Normale E(Y) = 150 * 0,2 = 30 V(Y) = 150 * 0,2 * 0,8 = 24 $Y \sim N(30, 24)$

Les deux moteurs sont indépendants. Soit S = X+Y. E(S) = 40, V(S) = 33 Donc $S \sim N(40, 33)$ $Pr(30 \leq S \leq 50) = 2\pi(10/\sqrt{33}) - 1 = 95,91\%$

2. $Pr(S \leq K) = 0,99$: $Pr\left(\frac{S-40}{\sqrt{33}} \leq \frac{K-40}{\sqrt{33}}\right) = 0,99$: $\pi\left(\frac{K-40}{\sqrt{33}}\right) = 0,99$: $\frac{K-40}{\sqrt{33}} = 2,33$: $K = 53,38$.

Q4. Quelles sont les trois sources d'erreur quand on pratique une analyse empirique pour estimer un paramètre tel que l'espérance mathématique par exemple. En discuter la pertinence à l'aide d'un exemple concret. (2 points. Ne dépasser pas une page de dissertation).

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPTEMBRE 2002-PREMIER SEMESTRE
A. NASSIRI

Respectez les règles suivantes, des points sont en jeux:

1. Numérotez vos feuilles dans le bon ordre.

2.Pour chaque exercice, écrivez " EXERCICE " en majuscule et en une couleur différente du reste de la copie, et n'oubliez pas son numéro. De même pour les questions.

3.Quand vous écrivez, suivez la ligne.

4.Encadrer le résultat.

5.Pour les personnes qui ne savent pas écrire avec une plume, ne vaudrait-il pas mieux s'appliquer, ou tout simplement commencer à apprendre à utiliser un bic !

La preuve par cinq pour que votre copie ait une bonne présentation. Alors, essayez de ne pas les oublier au risque de perdre quelques points.

Exercice 1

N personnes autour d'une table, chaque personne note un nombre confidentiel entre 1 et M sur une feuille.

Q1) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux nombres différents ? (2 points)

Rép.:L'événement contraire est " aucun nombre ne se répète "

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \text{ avec } P(\bar{A}) = \frac{M}{M} \times \underbrace{\frac{1}{M} \times ... \times \frac{1}{M}}_{N-1 \text{ termes}}$$

Exercice 2

Un fabricant livre des articles pouvant présenter des défauts. Le nombre de défauts par article suit une loi de Poisson de paramètre m.

Q1) On veut que la probabilité d'avoir plus de trois défauts sur un article soit d'environ 14.29%. Calculer la valeur de m. (2 points)

Rép.:X est le nombre de défauts dans un article. $X \sim P(m)$. $P(X > 3) = 0,1429 \Longrightarrow m = 2$ dans la table. L'usage de la table de probabilité individuelle rend cette tache un peu délicate : il faut sommer les colonnes de ces probabilités pour les valeurs de 4 et plus.

Q2) On considère un lot de cent articles respectant cette condition. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quatre articles ayant plus de trois défauts ?(2 points)

Rép.:Y=Nombre d'articles A : la condition d'avoir plus de trois défauts avec la probabilité de 14,29%. $Y \sim Bin(n = 100, p = 0,1429)$ n est assez grand pour approximer la loi Bin par la loi de Poisson de moyenne $m = 14,29$. Dans la table, nous n'avons que $m = 14$ ou 15. Prenons la plus proche :$m = 14$ $P(Y \leq 14) = 0,0001 + 0,0004 + 0,0013 = 0,0018$ soit $0,18\%$.

Exercice 3

Dans la population de femmes, il y a une proportion p qui a développé un cancer du sein. On considère p comme la probabilité qu'une femme développe un cancer du sein. On suppose que leurs ascendantes (filles) courent un très grand risque q de le développer aussi à un certain âge et d'en mourir. Aussi, on suppose que ce risque est faible de moitié si la mère est saine. On choisit au hasard une ascendante.

Risque de mort d'un Cancer chez la mère :A	$P(A) = p$		$P(\bar{A}) = 1 - p$	
Risque de mort d'un Cancer chez la fille :B	$P(B/A) = q$	$P(\bar{B}/A) = 1 - q$	$P(B/\bar{A}) = q/2$	$P(B/\bar{A}$

Q1) Quelle est la probabilité de mourir d'un cancer du sein ? (2 points)
Rép.:$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = pq + (1-p)q/2 = \frac{q(1-p)}{2}$

Elle est morte d'un cancer du sein,
Q2) Quelle est la probabilité qu'elle ait hérité ce cancer de sa mère ? Commentaire (2 points)
Rép. : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{pq}{q(1+p)/2} = \frac{2p}{1+p}$. Si $P(A) = p = 1$ alors $P(A/B) = 1$ et si $p = 0$, $P(A/B) = 0$. Il faut voir comment évolue la probabilité du risque héréditaire entre la mère et son enfant que l'on se permet de mesurer par $P(A/B)$, en fonction de la situation de la mère mesurée par p. Cette relation est croissante concave. En termes simples : le risque que court la fille est aussi fort que celui de sa mère.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPTEMBRE 2002-SECOND SEMESTRE
A. NASSIRI

Respectez les règles suivantes, des points sont en jeux:

1. Numérotez vos feuilles dans le bon ordre.

2.Pour chaque exercice, écrivez " EXERCICE " en majuscule et en une couleur différente du reste de la copie, et n'oubliez pas son numéro. De même pour les questions.

3.Quand vous écrivez, suivez la ligne.

4.Encadrer le résultat.

5.Pour les personnes qui ne savent pas écrire avec une plume, ne vaudrait-il pas mieux s'appliquer, ou tout simplement commencer à apprendre à utiliser un bic !

La preuve par cinq pour que votre copie ait une bonne présentation. Alors, essayez de ne pas les oublier au risque de perdre quelques points.

Exercice 1

X est une variable aléatoire caractérisée par la fonction de densité $f(.)$ définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{Si } x > a, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Q1) Calculer E(X), V(X) et F(X). (3 points)

Rép. : Intégration par partie : E(X)=a+1, V(X)=1, $F(x) = 1 - e^{-(x-a)}$ avec $x > a$

Exercice 2

Le responsable des ressources humaines a remarqué un changement entre l'année 2001 et 2002 sur le plan de l'absentéisme. L'entreprise employait 100 salariés en 2001 et 150 en 2002. Il mène une enquête et obtient une estimation du taux d'absentéisme : 10% durant la première année et 15% durant la seconde.

Q1) Pensez-vous que cette augmentation du taux d'absentéisme est significative ? (Brève argumentation intuitive et sans faire aucun calcul). (1 point)

Rép. : L'effectif des employés est augmenté de 50%, le taux d'absentéisme augmente dans les mêmes proportions. Cette proportionnalité nous empêche d'y voir clair, du moins l'augmentation des effectifs ne laisse pas apparaître un effet groupe. En termes plus simples, on ne peut pas dire a priori que l'absentéisme est dû à l'augmentation des effectifs. Il est nécessaire de faire des tests statistiques et d'identifier la part d'effet qui revient au hasard.

Q2) Calculez l'intervalle de confiance à 95% pour l'estimation de la première année. (1 point) $\hat{p} = 0,1$

Rép. : L'intervalle de confiance à 95%, IC : Le quantile issu de la loi Normale est de $u_{0,975} = 1,96$. $E(\hat{p}) = p, V(\hat{p}) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} = \frac{0,1(1-0,1)}{100} = 0,0009, IC = \hat{p} \mp u_{0,975}\sqrt{V(\hat{p})} = [0,0412; 0,1588]$

Q3) Au vu de cet intervalle, que constatez-vous à propos de l'estimation ponctuelle de l'année 2002 ? En d'autres termes, y-a-t-il une augmentation significative ? (1 point)

Rép. : Le taux d'absentéisme de la deuxième année est de 15%. Il tombe dans l'intervalle de confiance de l'estimation de la première année. Une grande part revient donc au hasard.

Exercice 3

X est une variable aléatoire à valeurs dans N dont la fonction de probabilité $f(x, \theta)$ s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu θ :

$$f(x) = \frac{\theta^x}{(1+\theta)^{1+x}} \text{ avec } E(X) = \theta \text{ et } V(X) = \theta + \theta^2$$

On se propose d'estimer θ à partir d'une observation $(x_1, ..., x_n)$ qui est une réalisation d'un échantillon de taille n $(X_1, ..., X_n)$ de la loi définie ci-dessus.

Q1) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ est $\hat{\theta} = \frac{\sum_i x_i}{n}$ (2 points)

Q2) Connaissant $E(X)$ et $V(X)$, démontrer que $\hat{\theta}$ est un bon estimateur ? (2 points)

Rép. : Application des quatre critères d'un bon estimateur : Linéaire, Sans biais $(E(\hat{\theta}) = \theta$, Variance la plus petite (Quand n tend vers l'infini, la variance tend vers 0).

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE FEVRIER 2003
A. NASSIRI
Durée = 3 heures
Attention : Ile sera tenu compte de la bonne **présentation de la copie** ; bien sûr, toute copie-brouillon sera pénalisée. Par exemple, n'oubliez pas de **préciser le numéro de la question** dans vos réponses

Exercice $n^0 1$; Dénombrement et Algèbre des événements- Exercice 5 du TD 1, 3 points)

Une entreprise fabrique 4 types de pièces numérotées. On dispose d'un stock de 8 pièces de type A, 7 pièces de type B, 6 pièces de type C et de 5 pièces de type D. Le service des ventes se propose de faire des lots de quatre pièces. De combien de manières distinctes peut-on constituer :

Q1) un lot ayant au-moins une pièce A ? (1 point)

Q2) un lot ayant au-moins une pièce A et au-moins une pièce B ? (1 point)

Q3) un lot ayant au-moins une pièce A, au-moins une pièce B et au-moins une pièce C ? (1 point)

Rép.

Les lots de 4 pièces : $Card(\Omega) = C^4_{8+7+6+5} = C^4_{26} = 14950$

A : les lots de 4 pièces ayant au-moins une pièce A $\Leftrightarrow \overline{A}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce A : $Card(\overline{A}) = C^4_{7+6+5} = C^4_{18} = 3060$

B : les lots de 4 pièces ayant au-moins une pièce B $\Leftrightarrow \overline{B}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce B : $Card(\overline{B}) = C^4_{8+6+5} = C^4_{19}$

C : les lots de 4 pièces ayant au-moins une pièce C $\Leftrightarrow \overline{C}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce C : $Card(\overline{C}) = C^4_{8+7+5} = C^4_{20}$

$\overline{A} \cap \overline{B}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce A ni pièce B :$Card(\overline{A} \cap \overline{B}) = C^4_{6+5} = C^4_{11}$

$\overline{A} \cap \overline{C}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce A ni pièce C :$Card(\overline{A} \cap \overline{C}) = C^4_{7+5} = C^4_{12}$

$\overline{B} \cap \overline{C}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce B ni pièce C :$Card(\overline{B} \cap \overline{C}) = C^4_{8+5} = C^4_{13}$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$: les lots de 4 pièces sans aucune pièce A, ni pièce B, ni pièce C :$Card(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = C^4_5$

Q1) $Card(A) = C^4_{26} - C^4_{18} = 14950 - 3060 = 11890$

Q2) un lot de 4 pièces ayant au-moins une pièce A et au-moins une pièce B ? (2 points)

$$\begin{array}{lll} Card(\overline{A \cap B}) & = Card(\overline{A} \cup \overline{B}) & = Card(\overline{A}) + Card(\overline{B}) - Card(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ & & = C^4_{18} + C^4_{19} - C^4_{11} \\ \Rightarrow & Card(A \cap B) & = C^4_{26} - \left[C^4_{18} + C^4_{19} - C^4_{11}\right] = 14950 - 6606 = 8344 \end{array}$$

Q3) un lot de 4 pièces ayant au-moins une pièce, au-moins une pièce B et au-moins une pièce C ? (2 points)

$$\begin{array}{ll} Card(\overline{A \cap B \cap C}) & = Card(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \\ & = Card(\overline{A}) + Card(\overline{B}) + Card(\overline{C}) - \left[Card(\overline{A} \cap \overline{B}) + Card(\overline{A} \cap \overline{C}) + Card(\overline{B} \cap \overline{C})\right] \\ & = C^4_{18} + C^4_{19} + C^4_{20} - \left[C^4_{11} + C^4_{12} + C^4_{13}\right] + C^4_5 \\ \Rightarrow & Card(A \cap B \cap C) = C^4_{26} - Card(\overline{A \cap B \cap C}) = 4704 \end{array}$$

Exercice $n^0 2$;Algèbre des événements et Probabilité, 4 points

On suppose qu'un chômeur peut soit trouver un emploi, soit suivre une formation ; il peut cumuler les deux aussi. Au cours d'une année, les chances qu'il trouve un emploi sont de 10%, et celles d'intégrer une formation de 40%.

Q1) En supposant que ces deux possibilités sont indépendantes, quelle est la probabilité de ne pas rester chômeur ? (1 point)

Q2) Sachant que les chances de trouver un emploi doublent lorsque le demandeur d'emploi est déjà passé par une formation, recalculer la probabilité de ne pas rester chômeur. (1 point)

Q3) En comparant les deux résultats, quels sont donc les effets de l'omission de la dépendance entre les deux possibilités sur les statistiques de chômage ? (2 points)

Rép.

Q1) Pr(ne pas chômer) $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,1 + 0,4 - 0,4 * 0,1 = 0,46$,
Taux de chômage est de 0,54.

Q2) Pr(ne pas chômer) $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,1 + 0,4 - 0,4 * 0,2 = 0,42$,
Taux de chômage est de 0,58.

Q3) Sou-estimation du taux de chômage de quatre points.

Exercice $n^0 3$; (Dénombrement et Lois usuelles, 6 points)

Un cambrioleur de voiture dispose d'un trousseau de 100 clés et s'apprête à ouvrire une voiture prise au hasard dans la rue. On suppose que la clé de cette voiture figure dans le trousseau mais le cambrioleur ne peut pas l'identifier. On suppose également que le cambrioleur n'essaie que trois clés pour ne pas attirer l'attention lorsqu'il tente de voler une voiture.

Q1) Quelle est la probabilité d'ouvrire la voiture ? (2 points)

Q2) Notre cambrioleur tente de voler 100 voitures. Soit X le nombre de voitures qu'il arrive à ouvrire. Quelle est la loi X ? (2 points)

Q3) Quelle est la probabilité d'ouvrire 10 voitures ? (2 points)

Rép.

Q1-(1 point))

Essai de clés de façon ordonnée (sans remise, sans répétition):

	Ouvrire du premier coup	$=$	$\frac{1}{100}$			$=$	0.01
$+$	Ouvrire au 2ème coup	$=$	$\frac{99}{100}$	$*$	$\frac{1}{99}$	$=$	0.01
$+$	Ouvrire au 3ème coup	$=$	$\frac{99}{100} * \frac{98}{99}$	$*$	$\frac{1}{98}$	$=$	0.01
$=$	Ouvrire la voiture	$=$					0.03

Essai de clés de façon désordonnée (avec remise, essai d'un clé plusieurs fois) :

	Ouvrire du premier coup	$=$	$\frac{1}{100}$			$=$	0.01
$+$	Ouvrire au 2ème coup	$=$	$\frac{99}{100}$	$*$	$\frac{1}{100}$	$=$	0.0099
$+$	Ouvrire au 3ème coup	$=$	$\frac{99}{100} * \frac{99}{100}$	$*$	$\frac{1}{100}$	$=$	0.009801
$=$	Ouvrire la voiture	$=$					0.029701

Dans les deux cas, $p = 0,3$. On suppose en effet que le voleur est organisé.

Q2-(1 point)) $X \sim Bin(n = 100; p = 0.03) \approx Pois(m = 3)$

Q3-(2 points)) Regarder la table $m = 3$ et $k = 10$, $P(X = 10) = 0,0008$ Très faible heureusement.

Exercice $n^0 4$; (Lecture des tables de contingence) (1/2 point par question)

Dans le tableau suivant, nous disposons des informations réelles sur la durée de chômage et ses issues de 1394 de demandeurs d'emploi inscrits à l'ANPE. Ces chercheurs d'emploi ont été radiés des listes de l'ANPE en obtenant un emploi, un stage ou autre.

Durée de chômage (en mois) versus Issues au chômage

Durée de chômage (en mois)	Obtention d'un Emploi	Obtention d'un Stage	Autre	Total
0- 1	58	15	34	107
(%)	9,35	6,79	6,15	7,68
1 2	103	31	54	188
(%)	16,61	14,03	9,76	13,49
2- 3	77	22	56	155
(%)	12,42	9,95	10,13	11,12
3- 4	73	21	44	138
(%)	11,77	9,5	7,96	9,9
4- 5	48	16	27	91
(%)	7,74	7,24	4,88	6,53
5- 6	47	9	42	98
(%)	7,58	4,07	7,59	7,03
6- 7	30	9	29	68
(%)	4,84	4,07	5,24	4,88
7- 8	18	12	26	56
(%)	2,9	5,43	4,7	4,02
8- 9	24	13	20	57
(%)	3,87	5,88	3,62	4,09
9 -10	15	6	26	47
(%)	2,42	2,71	4,7	3,37
10 -11	11	5	22	38
(%)	1,77	2,26	3,98	2,73
11 -12	13	7	22	42
(%)	2,1	3,17	3,98	3,01
12 -14	24	16	24	64
(%)	3,87	7,24	4,34	4,59
14 -16	18	7	31	56
(%)	2,9	3,17	5,61	4,02
16 -18	14	4	19	37
(%)	2,26	1,81	3,44	2,65
18 -21	12	8	24	44
(%)	1,94	3,62	4,34	3,16
21 -24	12	5	10	27
(%)	1,94	2,26	1,81	1,94
24et +	23	15	43	81
(%)	3,71	6,79	7,78	5,81
Total	620	221	553	1394
(%)	100	100	100	100

Q1) A quelles distributions correspondent les pourcentages fournis dans le tableau ?

Q2) Quelle est la probabilité de chômer un mois et de trouver un emploi ?

Q3) Calculer la distribution (marginale) des issues au chômage ?

Q4) Quelle est l'issue la moins probable ?

Q5) Recalculer la question Q2 en supposant que la variable "issue au chômage" est indépendante de la variable "durée de chômage" ?

Q6) Peut-on dire que ces deux variables sont indépendantes ?

Q7) Un chômeur de longue durée est un chômeur qui reste plus de douze mois en chômage. Quelle est la probabilité d'être un chômeur de longue durée ?

Q8) Quelle est la durée de chômage la plus probable pour trouver un emploi, respectivement un stage ?

Q9) Que peut-on dire de l'évolution temporelle des chances de trouver un emploi ou d'intégrer un stage ?

Q10) Donner un commentaire d'une page au maximum à partir de ce tableau en vous référant aux calculs demandés dans les 9 questions précédentes.

Rép.

Supposons que X est la durée de chômage et Y l'issue au chômage. X est qantitative concernant l'historique de chaque chercheur d'emploi, alors que Y est qualitative représentant son devenir sur le marché de travail.

Q1) Distribution de la durée de chômage conditionnelle à l'issue : $Pr(X \mid Y = y_l)$, $l = 1$ pour l'issue "emploi", et $l = 2$ pour l'issue "stage". (somme de chaque colonne équivaut 100%)

Q2)$Pr(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{58}{1394} = 4,16\%$

Q3)La distribution (marginale) des issues au chômage :

Y	$P(Y = y_l)$
Emploi	$\frac{620}{1394} = 44,48\%$
Stage	$\frac{221}{1394} = 15,85\%$
Autre	$\frac{553}{1394} = 39,67\%$

Q4) "Stage" est l'issue la moins probable, seulement 15,85%.

Q5)$Pr(X = 1 \cap Y = 1) = Pr(X = 1) \times Pr(Y = 1) = \frac{107}{1394} \times \frac{620}{1394} = 7,68\% \times 44,48\% = 0,0342 = 3,42\%$

Q6) Non, la durée de chômage n'est pas du tout indépendante de l'issue. En effet, $Pr(X = 1 \cap Y = 1) > Pr(X = 1) \times Pr(Y = 1)$, en ce sens que les stages ont, selon les objectifs de politiques de formation, un rôle d'aide au retour à l'emploi.

Q7) Fréquence des chômeurs de longue durée (au dela de 12 mois) :

Obtention d'un Emploi	Obtention d'un Stage	Autre	Total
$\frac{24+18+14+12+12+23}{620}$	$\frac{16+7+4+8+5+15}{221}$	$\frac{24+31+19+24+10+43}{553}$	$\frac{64+56+37+44+27+81}{1394}$
$= \frac{103}{620} = 16,61$	$= \frac{55}{221} = 24,89$	$= \frac{151}{553} = 27,30$	$= \frac{309}{1394} = 22,17$

De façon générale, le taux de chômage de longue de durée est de 22,17%.

De façon très fine tenant compte du devenir des chercheurs d'emploi,

* la proportion des chômeurs qui ne trouvent pas un emploi au bout de 12 mois de recherche est de 16,61%,

* la proportion des chômeurs qui ne trouvent pas un stage au bout de 12 mois de recherche est de 24,89%,

* la proportion des chômeurs qui ne trouvent pas autre chose (qu'un stage ou emploi) au bout de 12 mois de recherche est de 27,30%,

Q8) La durée de chômage la plus probable pour trouver un emploi, respectivement un stage, est le mode des deux premières colonnes. Le mode des deux premières colonne est 2 mois, c'est à cette période que les deux issues sont les plus probables.

Q9) L'évolution temporelle des chances de trouver un emploi ou d'intégrer un stage. Faire le graphe pour montrer qu'elles sont parallèles, hormis pendant certaines périodes.

Q10) Commentaire. Structure des phrases et usage des résultats des différentes questions.

Exercice $n^0 5$; (Lois Usuelles et Théorème de Bayes, 4 points)

La population active de la région Bretagne se compose essentiellement selon trois secteurs : Agriculture (A), Industrie (B) et Service (C). On réalise une enquête auprès d'un échantillon d'actifs questionnés dans chaque secteur afin d'étudier les taux de chômage.

On suppose que la Bretagne compte 10 000 actifs, que le secteur agricole compte autant d'actifs que les deux autres réunis, et que le taux le chômage est de 5% parmi les agriculteurs et double parmi les autres. L'enquête est réalisée auprès de 50 actifs dans le secteur agricole, et 25 dans chacun des deux autres secteurs.

XA (respectivement XB et XC) est la variable correspondant au nombre de personnes au chômage d'après l'enquête réalisée dans chaque secteur.

Q1) Quelle est la loi de probabilité de chacune de ces trois variables aléatoires ? (1 point)

Q2) Peut-on approximer celle-ci par une loi Binomiale, voire une loi de Poisson de paramètre $2,5$? (1 point)

Q3) Quelle est la probabilité d'avoir trois personnes au chômage dans chaque secteur ? (1 point)

Q4) Supposons qu'on obtienne trois chômeurs et supposons aussi que les trois échantillons ait été mélangés, quelle est la probabilité qu'ils soient des agriculteurs ? (1 point)

Rép.

$$
\begin{array}{llll}
 & P(A)=1/2 & P(B)=1/4 & P(C)=1/4 \\
 & N=5000 & N=2500 & N=2500 \\
 & P=5\% & p=10\% & p=10\% \\
 & n=50 & n=25 & n=25 \\
Q1) & X\sim Hyp(N,n,p) & X\sim Hyp(N,n,p) & X\sim Hyp(N,n,p) \\
Q2) & X\sim Bin(n,p) & X\sim Bin(n,p) & X\sim Bin(n,p) \\
Q2) & X\sim Pois(m=np) & X\sim Pois(m=np) & X\sim Pois(m=np) \\
Q3) & P(X=3\mid A)=0,2138 & P(X=3\mid B)=0,2138 & P(X=3\mid C)=0,2138
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Q4) \quad P(A\mid (X=3)) & = & \frac{Pr(A)\times Pr((X=3)|A)}{Pr(A)\times Pr((X=3)|A)+Pr(B)\times Pr((X=3)|B)+Pr(C)\times Pr((X=3)|C)} \\
 & = & \frac{Pr(A)}{Pr(A)+Pr(B)+Pr(C)} = \frac{1}{2}
\end{array}
$$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE JUIN 2003
A. NASSIRI
Durée = 3 heures

Question de cours

Reconstituez ce tableau sur votre copie en y reportant seulement le numéro de la question dans une première colonne, suivi du numéro de la réponse dans une seconde colonne. (1 point par question)

n^0	**Question**	**Réponse**		
Q1.	$U \sim N(0,1)$ telle que $Pr(\mid U \mid < a) = 0,82$ et $Pr(U < -b) = 0,61$	Rép1.: $a = 1,34$ $b = -0,28$	Rép2.: $a = -1,34$ $b = -0,28$	Rép3.: $a = 1,34$ $b = 0,28$
Q2.	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X < 3) = Pr(X \geq -1) = 0,8413$	Rép1.: $Pr(0 < X < 1) = 0,1519$	Rép2.: $Pr(0 < X < 1) = 0,1915$	Rép3.: $Pr(0 < X < 1) = 0,2599$
Q3	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X > -3) = 0,6915$ et $Pr(X < 2) = 0,9772$	Rép1.: $\mu = 2$ et $\sigma^2 = -4$	Rép2.: $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 4$	Rép3.: $\mu = -2$ et $\sigma^2 = 4$
Q4.	La longueur d'un intervalle de confiance bilatéral à 95% d'une moyenne est	Rép1.: $u_{0,975} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	Rép2.: $2\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	Rép3.: $2\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$
Q5.	Les paramètres de la droite de régerssion $y = a + bx$ sont :	Rép1.: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$	Rép2.: $\hat{b} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{(x_i - \overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$	Rép3.: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y}) \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$

Exercice 1 (4 points)

Soit X une variable aléatoire de densité $f(.)$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\frac{1}{2}(x-1)} & \text{Si } x \geq 1, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Q1) Calculer α, $E(X)$, $V(X)$ et $F(X)$ (2 points).

Corrigé : $\alpha = 1/2.E(X) = 3$.

Q2) Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = \frac{X-1}{2}$. Démontrer que la fonction de densité de Y est (2 points):

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{Si } y \geq 0, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

Lors de l'épreuve des Statistiques du premier semestre, les notes des étudiants de Brest et de Quimper donnaient les moyennes et variances suivantes:

Ville	Nombre d'étudiants	Moyenne	Variance
Brest	50	9	12
Quimper	26	11	8,78

Q1) Calculer l'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne des étudiants Quimpérois et celle des étudiants Brestois. (2 points)

Rép. Pour Brest $[6.5244521, 8.4455479]$. Pour Quimper : $[8.8414737, 11.235449]$

Q2) Peut-on dire que les notes de étudiants Brestois sont plus faibles que celles des Quimpérois. Argumenter votre réponse au regard des intervalles de confiance. (2 points).

Rép. : Oui

Exercice 3 (2 points)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N, de fonction de probabilité $f(x_i) = \frac{(1+\theta)^{x_i}}{\theta^{(1+x_i)}}$ et d'espérance mathématique $E(X) = \theta + 1$. Cette fonction de probabilité s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu θ qu'on se propose d'estimer à partir d'un échantillon de n observations $(x_1, ..., x_n)$.

Q1) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ est $\hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n - 1$. (1 point)

Q2) Quelles sont les propriétés d'un bon estimateur ? (1 point)

Exercice 4 (5 points)

A l'échelle nationale, le nombre de décès est de 10 pour 1000 patients hospitalisés. On souhaite réaliser une enquête sur les décès dans un hôpital particulier, et on désigne par F_n le taux de mortalité estimé sur un échantillon de n patients hospitalisés dans cet hôpital.

Q1) Déterminez la taille de l'échantillon si l'on accepte une erreur de 1 % avec une probabilité de 0.95 et en considérant que F_n suit une loi Normale. (2 points)

Nous nous intéressons uniquement à deux services de cet hôpital, en supposant que le service I représente le double en terme de patientèle que le service II. Une enquête est réalisée sur un échantillon de taille n fixée selon les conditions de la question 1. Ces n patients appartiennent aux deux services I et II selon le poids respectif de ces derniers. Après enquête, on constate que 2 personnes sont mortes dans chacun de deux services.

Q2) Calculer les trois probabilités de mortalité, celle de l'hôpital, et celles des deux services. Donner leur intervalles de confiance à 95%. (2 points)

Q3) Que pensez-vous de la situation de cette hôpital par rapport aux statistiques nationales ? Quid des deux services ? (1 point)

Rép. : D'après un calcul simple, on trouve

$$\frac{0,01}{\sqrt{Var(F_n)}} = 1,96 \Leftrightarrow \left(\frac{0,01}{1,96}\right)^2 = Var(F_n) \Leftrightarrow \left(\frac{0,01}{1,96}\right)^2 = \frac{0,01(1-0,01)}{n}$$

On en déduit que $n = 196^2 * 0,01 * 0,99 = 380,32 = 381$ patients hôspitalisés.

$n_I = 381 * 2/3 = 254, F_1 = \frac{2}{254}$ $n_2 = 381 * 1/3 = 127, F_2 = \frac{2}{127}$.

n^0	**Question**	**Réponse à cocher**		
Q1.	Si X est une variable aléatoire de densité $f(x) =$	Rép1.: Vrai	Rép2.: Faux	Rép3.: Ne sait p
Q2.	$Pr\left(\lvert\overline{X}_n - \mu\rvert \geq \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \forall\varepsilon > 0$	Rép1.	Rép2.	Rép3.
Q3.	$U \sim N(0,1)$ telle que $Pr(\mid U \mid < a) = 0,82$ et $Pr(U < -b) = 0,61$	Rép1.: $a = 1,34$ $b = -0,28$	Rép2.: $a = -1,34$ $b = -0,28$	Rép3.: $a = 1,34$ $b = 0,28$
Q4.	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X < 3) = Pr(X \geq -1) = 0,8413$	Rép1.: $Pr(0 < X < 1) = 0,1915$	Rép2.: $Pr(0 < X < 1) = 0,1519$	Rép3.: $Pr(0 <$
Q5.	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X > -3) = 0,6915$ et $Pr(X < 2) = 0,9772$	Rép1.: $\mu = -2$ et $\sigma^2 = 4$	Rép2.: $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 4$	Rép3.: $\mu = 2$ et $\sigma^2 =$
Q6.	La longueur d'un intervalle de confiance bilatéral à 95% d'une moyenne est	Rép1.: $2\ u_{0,975}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	Rép2.: $u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	Rép3.: 2
Q7.	Les paramètres de la droite de régerssion $y = a + bx$ sont :	Rép1.: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$	Rép2.: $\hat{b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{(x_i-\overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$	Rép3.: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{}$ $\hat{a} = \overline{y} -$
Q8.	Si $X \sim LN(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ avec $E(X) = 600$ et $V(X) = 300^2$ alors	$\mu_Z =$ et $\sigma_Z^2 =$	$\mu_Z =$ et $\sigma_Z^2 =$	$\mu_Z =$ et $\sigma_Z^2 =$

Exercice 1 (4 points)

Soit X une variable aléatoire de densité $f(.)$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\frac{1}{2}(x-1)} & \text{Si } x \geq 1, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Q1) Calculer α, $E(X)$, $V(X)$ et $F(X)$ (2 points).

Q2) Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = \frac{X-1}{2}$. Démontrer que la fonction de densité de Y est (2 points):

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{Si } y \geq 0, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Exercice (points)

Lors de l'épreuve des Statistiques du premier semestre, les notes des étudiants de Brest et de Quimper donnaient les moyennes et variances suivantes:

Ville	Nombre d'étudiants	Moyenne	Variance
Brest	50	9	12
Quimper	26	11	8,78

Q1) Calculer l'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne des étudiants Quimpérois et celle des étudiants Brestois. (2 points)

Q2) Peut-on dire que les notes de étudiants Brestois sont plus faibles que celles des Quimpérois. Argumenter votre réponse au regard des intervalles de confiance. (2 points).

Exercice 2 (4 points)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans IN de fonction de probabilité $f(x_i) = \frac{(1+\theta)^{x_i}}{\theta^{(1+x_i)}}$ et d'espérance mathématique $E(X) = \theta + 1$. Cette fonction de probabilité s'écrit en fonction d'un paramètre inconnu θ qu'on se propose d'estimer à partir d'un échantillon de n observations $(x_1, ..., x_n)$.

Q1) Démontrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ est $\hat{\theta}_{MV} = \overline{X}_n - 1$. (1 point)

Q2) Quelles sont les propriétés d'un bon estimateur ? (2 points)

Q3) Connaissant $E(X)$, démontrer que $\hat{\theta}_{MV}$ est un estimateur sans biais ? (1 point)

Exercice (3 points)

A l'échelle nationale, le nombre de décès est de 10 pour 1000 patients hospitalisés. On souhaite réaliser une enquête sur les décès dans un hôpital particulier, et on désigne par F_n le taux de mortalité estimé sur un échantillon de n patients hospitalisés dans cet hôpital.

Q1) Déterminez la taille de l'échantillon si l'on accepte une erreur de 1 % avec une probabilité de 0.95 et en considérant que F_n suit une loi Normale.

Nous nous intéressons à deux services uniquement, en supposant que le service I représente le double en terme de patientèle que le service II. Une enquête est réalisée sur un échantillon de taille n fixée selon les conditions de la question 1. Ces n patients appartiennent aux deux services I et II selon leur poids repectifs. Après enquête, on constate que 2 personnes sont mortes dans le service I et 2 dans le service II.

Q2) Calculer les trois probabilités de mortalité, celle de l'hôpital, et celles des deux services. Donner leur intervalles de confiance à 95%.

Q3) Que pensez-vous de la situation de cette hôpital par rapport aux statistiques nationales ?

Rép. : D'après un calcul simple, on trouve

$$\frac{0,01}{\sqrt{Var(F_n)}} = 1,96 \Leftrightarrow \left(\frac{0,01}{1,96}\right)^2 = Var(F_n) \Leftrightarrow \left(\frac{0,01}{1,96}\right)^2 = \frac{0,01(1-0,01)}{n}$$

On en déduit que $n = 196^2 * 0,01 * 0,99 = 380,32 = 381$ patients hôspitalisés.

$n_I = 381 * 2/3 = 254, F_1 = \frac{2}{254}$ $n_2 = 381 * 1/3 = 127, F_2 = \frac{2}{127}$.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DE SEPTEMBRE 2003- PREMIER SEMESTRE
DOCUMENT JOINT : LA TABLE DE LA LOI BINOMIALE ET DE POISSON
A. NASSIRI
Durée = 1h30

Exercice 1 (3 points)

Nous avons n personnes qui choisissent au hasard entre m nombres. Soit l'événement A : "Les nombres choisis par les n personnes sont tous différents".

Q**1)** Est-ce que A est possible si $n > m$? (0,5 point)

Q2) Supposons que $n \leq m$. Quelle-est la probabilité de A, $Pr(A)$? (1 point)

Soit l'événement B : "Parmi les n choisis, il y a au moins deux nombres différents".

Q3) Comment peut-on écrire B en fonction de A ? En déduire $Pr(B)$. (1 point)

Q4) Vérifer que pour $n = 5$ et $m = 10$, votre formule donne bien le résultat exact $Pr(B) = 0,6976$. (0,5 point)

Exercice 2 (3 points)

C'est un jeu qui consiste à passer 3 épreuves successives. Chaque candidat doit passer les 3 épreuves dans l'ordre pour gagner, et ne peut passer une épreuve que s'il réussit toutes les précédentes. S'il ne réussit pas une épreuve, il est donc automatiquement éliminé et ne peut passer les épreuves suivantes. Supposons que les épreuves ont toutes la même probabilité de réusssite $0,2$.

Q1) Quelle est la probobalité qu'un candidat réussisse dans ce jeu ? (1 point)

prob $= 0,2^3 = 0,008$

Soit un groupe de 500 candidats et X le nombre des vainqueurs.

Q2) Quelle est la loi de X, et par quelle loi peut-on l'approximer ? (1 point)

Q3) Calculer $Pr(X = 4)$? (1 point)

Table de Poisson Poi(4)

Exercice 3 (4 points)

La population active de la région Bretagne se compose essentiellement de trois secteurs : Agriculture (A), Industrie (B) et Service (C). On réalise une enquête auprès d'un échantillon d'actifs questionnés dans chaque secteur afin d'étudier le taux de chômage. On suppose que la Bretagne ne compte que 200 actifs, que le secteur agricole compte autant d'actifs que les deux autres réunis, et que le taux le chômage est de 5% parmi les agriculteurs et double parmi les autres. L'enquête est réalisée auprès de 20 actifs dans le secteur agricole, et 10 dans chacun des deux autres secteurs.

X_A (respectivement X_B et X_C) est la variable correspondant au nombre de personnes au chômage d'après l'enquête réalisée dans le secteur A (respectivement B et C).

Q1) Quelle est la loi de probabilité de chacune de ces trois variables aléatoires ? (1 point)

Q2) Peut-on l'approximer par une loi Binomiale ? (1 point)

Q3) Quelle est la probabilité (d'après la table) d'avoir trois personnes au chômage dans chaque secteur ? (1 point)

Q4) Supposons qu'on obtienne trois chômeurs et supposons aussi que les trois échantillons aient été mélangés, quelle est la probabilité qu'ils soient tous des agriculteurs ? (1 point)

Rép. Exercice 1 Q1) Impossible. Q2) Si $n \leq m$, $Pr(A) = \frac{A_m^n}{m^n}$. Q3) A est l'événement contraire de B. Donc $Pr(B) = 1 - Pr(A)$. Q4) $n = 5$, $m = 10$, $Pr(B) = 1 - Pr(A) = 0,6976$

Rép. Exercice 2 Q1) $Pr(Russir) = 0,2^3 = 0,008$ Q2) $X \sim Bin(500; 0,008)$. Q3) $E(X) = 500 * 0,008 = 4$, p faible et$n$ grand, Bin=Poisson, $X \sim Poi(4)$. Q4) $Pr(X = 4) = Table$

Rép. Exercice 3

	$P(A) = 1/2$	$P(B) = 1/4$	$P(C) = 1/4$
	$N = 100$	$N = 50$	$N = 50$
	$P = 10\%$	$p = 20\%$	$p = 20\%$
	$n = 20$	$n = 10$	$n = 10$
$Q1)$	$X \sim Hyp(N, n, p)$	$X \sim Hyp(N, n, p)$	$X \sim Hyp(N, n, p)$
$Q2)$	$X \sim Bin(n, p)$	$X \sim Bin(n, p)$	$X \sim Bin(n, p)$
$Q3)$	$P(X = 3 \mid A) =$	$P(X = 3 \mid B) =$	$P(X = 3 \mid C) =$

$$Q4) \quad P(A \mid (X = 3)) = \frac{Pr(A) \times Pr((X=3)|A)}{Pr(A) \times Pr((X=3)|A) + Pr(B) \times Pr((X=3)|B) + Pr(C) \times Pr((X=3)|C)}$$
$$= \frac{Pr(A)}{Pr(A) + Pr(B) + Pr(C)} = \frac{toto}{tata}$$

Exercice

Soient A et B deux événements incompatibles tels que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$. Calculer le probabilité de l'événement E : " au moins l'un de ces événements se produit" (2 points)

Rep. : A et B sont incompatibles : $Pr(A \cap B) = 0$. Donc $P(E) = P(A \cup B) = 1/4 + 2/3 - 0 = 11/12$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
Examen de Septembre 2003- Second Semestre
Document joint : La table des lois Normale et Student
A. Nassiri
Durée = 1h30

Question de cours (2 points) : Reconstituez ce tableau sur votre copie en y reportant seulement le numéro de la question dans une première colonne, suivi du numéro de la réponse dans une seconde colonne. (0,5 point par question)

n^0 **Question**	**Réponse (1/2 point par question)**		
Q1. X est une variable aléatoire sur $[a, +\infty)$ de densité $f(x) = \lambda e^{-2(x-a)}$	**Rép1. :** $\lambda = 2$	**Rép2. :** $\lambda = \frac{1}{2}$	**Rép3. :** $\lambda = a$
Q2. Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff	**Rép1.** $\forall \varepsilon > 0$ $Pr\big(\lvert\overline{X}_n - \mu\rvert \geq \varepsilon\big) < \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$	**Rép2.** $\forall \varepsilon > 0$ $Pr\big(\lvert\overline{X}_n - \mu\rvert \leq \varepsilon\big) < \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$	**Rép3.** $\forall \varepsilon > 0$ $Pr\big(\lvert\overline{X}_n - \mu\rvert \geq \varepsilon\big) \geq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$
Q3. $X \sim LN(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ $E(X) = 500$ $V(X) = 500^2$	**Rép1.** $\mu_Z = ln(500) - ln(2)/2$ $\sigma_Z^2 = ln(2)$	**Rép2.** $\mu_Z = ln(500) + ln(2)/2$ $\sigma_Z^2 = ln(1/2)$	**Rép3.** $\mu_Z = ln(500) - ln(2)$ $\sigma_Z^2 = ln(2^2)$
Q4. X est V.A.C de densité $f(x)$. $Y = \varphi(X)$	**Rép1.** $g(y) = f\big(\varphi^{-1}(y)\big) * \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}$	**Rép2.** $g(y) = f\big(\varphi(y)\big) * \frac{d\varphi(y)}{dy}$	**Rép3.** $g(y) = F\big(\varphi^{-1}(y)\big) * \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}$

Exercice 1 (4 points) : Un individu a remarqué que les contrôles dans les bus se font une fois sur cinq. Il fait une centaine de voyages par mois. Soit X le nombre de contrôles qu'il subit en un mois.

Q1) Quelle est la loi exacte de cette variable aléatoire, et peut-on l'approximer? (1 point)

Q2) Quels sont les risques pour qu'il subisse 24 contôles au moins ? (1 point)

Q3) L'individu décide de ne plus acheter de tickets. Sachant que le ticket coûte un Euro, quelle amende minimale doit prévoir la compagnie pour que le fraudeur ait, à la fin du mois, 15, 87% de chances de se trouver gagnant ? (2 points)

Rép : $X \sim Bin(100, 1/5) \simeq N(E(X) = 20, V(X) = 16)$, $Pr(X \geq 24) = 1 - Pr(X < 24) = 1 - F(24) = 1 - \Pi(\frac{24-20}{4}) = 1 - \Pi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

Coût des 100 voyages	Coût des X amendes
1×100	$a \times X$

$Pr(aX < 1Euros.100) = 0,1587 \Longrightarrow \Pi\left(\frac{20-100/a}{4}\right) = 0,8413 \Longrightarrow \frac{20-100/a}{4} = 1 \Longrightarrow a = 100/16$ Euros.

Exercice 2 (4 points) : A l'échelle nationale, le nombre de décès sur les routes est de 10 pour 100 patients hospitalisés. On souhaite réaliser une enquête sur les décès dans un hôpital particulier, et on désigne par F_n le taux de mortalité estimé sur un échantillon de n accidentés de la route hospitalisés dans cet hôpital.

Q1) Déterminez la taille de l'échantillon si l'on accepte une erreur de 5 % avec une probabilité de 0.95 et en considérant que F_n suit une loi Normale. (1 point)

Nous nous intéressons à deux services uniquement, en supposant que le service I représente le double en terme de patientèle que le service II. Une enquête est réalisée sur un échantillon de taille n fixée selon les conditions de la question 1. Ces n patients appartiennent aux deux services I et II selon leur poids respectifs. Après enquête, on constate que 10 personnes sont mortes dans le service I et seulement 3 dans le service II.

Q2) Calculer les trois probabilités de mortalité, celle de l'hôpital, et celles des deux services. Donner leur intervalles de confiance à 95%. (2 points)

Q3) Qu'en pensez-vous ?(1 point)

Rép. : D'après un calcul simple, on trouve

$$\frac{0,05}{\sqrt{Var(F_n)}} = 1,96 \Leftrightarrow \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 = Var(F_n) \Leftrightarrow \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 = \frac{0,1(1-0,1)}{n}$$

On en déduit que $n = (1,96/0,05)^2 * 0,1 * 0,9 = 138.29760 = 139$ patients hôspitalisés.

$n_I = 139 * 2/3 = 92,66 = 93, F_1 = \frac{10}{93}$ $n_2 = 139 * 1/3 = 46,33 = 47, F_2 = \frac{3}{47}$.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
Examen de Janvier 2004
A. Nassiri
Durée : 3 heures
Aucun document n'est autorisé (Pas de tables statistiques)
Calculatrice autorisée : modèle standard

1. **Choisir une réponse parmi celles proposées.**

   Dans un conseil municipal, 5 élus sont candidats au poste de maire, 4 au poste de "premier adjoint", et 3 au poste de "second adjoint".

   Combien y-a-t-il de formes possibles de bulletins différents ?

   (a) si l'on doit inscrire un nom à chaque poste ? (1 point)
   Réponse 1 : 60 **Réponse 2** :120 **Réponse 3 :** 119

   (b) si l'on n'est pas obligé de voter pour les trois cas ? (1 point)
   Réponse 1 : 60 **Réponse 2** :120 **Réponse 3 :** 119

   (c) si l'on doit voter pour au moins un des trois candidats ? (1 point)
   Réponse 1 : 60 **Réponse 2** :120 **Réponse 3 :** 119

Poste	Maire	Premier adjoint	Second adjoint
Nombre de candidats	5	4	3

   (a) $5 \times 4 \times 3$

   (b) $(5+1) \times (4+1) \times (3+1)$. On rajoute une possibilité au cas où l'élu ne désigne aucun nom (Vote blanc).

   (c) L'événement contraire : aucun candidat $= 1 \times 1 \times 1 = 1$. Donc $((5+1) \times (4+1) \times (3+1)) - 1$.

2. Le mois dernier, les deux tiers des patients d'un médecin ont consulté pour un problème de grippe et le quart pour un problème d'allergie. Quelle est la fréquence des patients qui ont consulté en supposant que :

   (a) les deux pathologies sont incompatibles, en ce sens qu'aucun patient n'a souffert des deux simultanément? (1 point)

   (b) les deux pathologies sont compatibles mais indépendantes ? (1 point)

$P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/3$. A et B sont incompatibles : $Pr(A \cap B) = 0$. Donc $P(A \cup B) = 1/4 + 2/3 - 0 = 11/12$. A et B sont compatibles et indépendants : $Pr(A \cap B) = Pr(A) * Pr(B) = 2/12$. Donc $P(A \cup B) = 1/4 + 2/3 - 2/12 = 9/12$

3. Une loterie de 10 billets dont 1 billet permet de gagner 200 Euros, 2 billets permettent de gagner 100 Euros chacun et 3 billets permettent de gagner 50 Euros chacun.

   (a) Quelle est l'espérance de gain d'un joueur qui achète un billet ? (2 points)

   (b) Le jeu est-il équitable si chaque billet est vendu 55 Euros ? (1 point)

   (c) Une autre loterie de 10 billets dont 2 billets permettent de gagner 100 Euros chacun. Montrer que, sans tenir compte du coût d'achat de ces billets, l'espérance de gain d'un joueur qui achète 3 billets est de 60 Euros. (2 points)

   Indications facultatives pour résoudre cette dernière question : *X est une variable aléatoire qui représente le nombre de billets gagnants parmi les 3 achetés, et dont la distribution suit une loi usuelle à définir. Le gain peut alors s'écrire comme une fonction linéaire de cette variable dont on peut ainsi déduire l'espérance aisément.*

X	$P(X = x)$	$x * P$
0	0,4	0
50	0,3	15
100	0,2	20
200	0,1	20
		$E(X) = 55$

X : Nombre de billets gagnants. $X \sim Hyp(10, 3, p = \frac{2}{10})$ Gain (en Euros) $= 100 * X$ $E(Gain) = E(100 * X) = 100 * E(X) = 100 * n * p = 100 * 3 * 2/10 = 60$.

X	Gain	$P(X = x) = C_3^x \left(\frac{2}{10}\right)^x \left(\frac{8}{10}\right)^{(3-x)}$	$x * P$
0	0		
1	100		
2	200		
3	300		

4. Soit X la variable aléatoire représentant les quantités en tonnes vendues par jour. La distribution de cette variable est définie par le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_k)$	0,10	p_2	0,30	p_4	0,20	p_6

   (a) Déterminer la valeur de (p_2, p_4, p_6) en sachant que : (1 point)

   - on a autant de chances de vendre 1 tonne que 6 tonnes ;

   - on a deux fois de chances de vendre 2 tonnes que 4 tonnes.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de X et donner sa représentation graphique. (1 point)

   (c) Quelles sont les caractéristiques de position (Mode, Médiane, $E(X)$) et de dispersion $(V(X), \sigma(X), CV(X))$ de cette distribution. (1 point)

(d) L'année passée, la moyenne des ventes quotidiennes était de 4 tonnes avec un écart-type de 1 tonne. Au vu des statistiques calculées dans les questions précédentes, que pensez-vous de l'évolution des ventes (Pas plus de 10 lignes)? (1 point)

moyenne 3.4000000 xvar 2.2400000 xsig 1.4966630

5. En conduisant vite, le risque d'avoir un accident double. Supposons que, en conduisant normalement, ce risque et de 5%. On sait par ailleurs que 10% des automobilistes sont des chauffards qui aiment la vitesse.

   (a) Quelle est la fréquence des accidents ? (2 points)

   (b) On prend un conducteur au hasard et on constate qu'il a eu un accident, quelle est la probabilité qu'il soit un de ces chauffards. ? (2 points)

   Figure : Arbre de décision

$Pr(A) = 10\%$		$Pr(\overline{A}) = 90\%$	
$Pr(B \mid A) = 10\%$	$Pr(\overline{B} \mid A) = 90\%$	$Pr(B \mid \overline{A}) = 5\%$	$Pr(\overline{B} \mid \overline{A}) = 95\%$

6. **(Lois Usuelles et Théorème de Bayes, 6 points)**[1] La population des étudiants inscrits en deuxième année de DEUG. Sc. Economique viennent de trois types de BACC que l'on distingue par les lettres A, B et C. On réalise une enquête auprès de trois échantillons d'étudiants représentant ces trois BACC afin d'étudier les taux d'échec.

   On suppose que la population des étudiants en 2ème année Sc. Eco. compte 10000 personnes et que le BACC A compte autant de personnes que les deux autres réunis. On suppose aussi que le taux d'échec est de 5% parmi les bacheliers de type A et double parmi les autres. L'enquête est réalisée auprès de 50 étudiants choisis au hasard parmi les bacheliers de type A, et 25 parmi chacun des deux autres types de BACC.

   XA (respectivement XB et XC) est la variable correspondant au nombre d'étudiants en échec d'après l'enquête réalisée pour chaque type de BACC.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de chacune de ces trois variables aléatoires ? (1 point)

   (b) Peut-on approximer celle-ci par une loi Binomiale, voire une loi de Poisson de paramètre $2,5$? (1 point)

   (c) Quelle est la probabilité d'avoir trois étudiants en échec dans chaque type de BACC ? (2 points)

   (d) Supposons que, en choisissant au hasard trois étudiants, ceux-ci soient en échec. Supposons aussi que les échantillons des trois types de BACC ait été mélangés, quelle est la probabilité qu'ils viennent tous d'un BACC A ? (2 points)

[1] La fonction de probabilité d'une loi de Poisson de paramètre m est : $P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$.

	$P(A) = 1/2$	$P(B) = 1/4$	$P(C) = 1/4$
	$N = 5000$	$N = 2500$	$N = 2500$
	$P = 5\%$	$p = 10\%$	$p = 10\%$
	$n = 50$	$n = 25$	$n = 25$
$Q1)$	$X \sim Hyp(N, n, p)$	$X \sim Hyp(N, n, p)$	$X \sim Hyp(N, n, p)$
$Q2)$	$X \sim Bin(n, p)$	$X \sim Bin(n, p)$	$X \sim Bin(n, p)$
$Q2)$	$X \sim Pois(m = np)$	$X \sim Pois(m = np)$	$X \sim Pois(m = np)$
$Q3)$	$P(X = 3 \mid A) = 0,2138$	$P(X = 3 \mid B) = 0,2138$	$P(X = 3 \mid C) = 0,2138$

$$Q4) \quad \begin{aligned} P(A \mid (X = 3)) &= \frac{Pr(A) \times Pr((X=3)|A)}{Pr(A) \times Pr((X=3)|A) + Pr(B) \times Pr((X=3)|B) + Pr(C) \times Pr((X=3)|C)} \\ &= \frac{Pr(A)}{Pr(A) + Pr(B) + Pr(C)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
Examen du Semestre 1 - Juin 2004
A. Nassiri
Durée : 1 heure 30
Aucun document n'est autorisé (Pas de tables statistiques)
Calculatrice autorisée : modèle standard
Barème : 1 point par question

1. On suppose que le risque de base d'avoir un cancer est de 2% et que celui-ci quintuple en fumant. On note p la proportion des fumeurs.
   (a) Quelle serait la fréquence des personnes susceptibles de développer un cancer ?
   (b) On prend une personne au hasard et on constate qu'elle est malade du cancer, quelle est la probabilité qu'elle ait fumé ?
   (c) Commentaire
2. Les deux tiers des étudiants en échec dans la filière économique échouent à cause des matières techniques, et le quart à cause des matières de dissertation. Quel est le taux d'échec en supposant que ?
   (a) les deux familles de matières sont incompatibles ?
   (b) les deux familles de matières sont compatibles mais indépendantes ?
   (c) les deux familles de matières sont dépendantes en ce sens que les difficultés dans les matières techniques sont plus importantes lorsqu'on éprouve des difficultés dans les matières de dissertation. Supposons que, dans ce cas, le taux d'échec dans les matières techniques double ?
   (d) Que signifient ces trois hypothèses et que déduisez-vous des probabilités correspondantes?
3. La population des étudiants inscrits en deuxième année de DEUG. Sc. Economique viennent de trois types de BACC que l'on distingue par les lettres A, B et C. On réalise une enquête auprès de trois échantillons d'étudiants représentant ces trois BACC afin d'étudier les taux d'échec.

   On suppose que la population des étudiants en 2ème année Sc. Eco. compte 10000 personnes et que le BACC A compte autant de personnes que les deux autres réunis. On suppose aussi que le taux d'échec est de 10% parmi les bacheliers de type A et double parmi les autres. L'enquête est réalisée auprès de 100 étudiants choisis au hasard parmi les bacheliers de type A, et 50 parmi chacun des deux autres types de BACC.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de l'échec dans chaque type de bacc ?
   (b) Peut-on approximer celles-ci par des lois Binomiales ou de Poisson[2] dont il faut déterminer les paramètres ?
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir dix étudiants en échec dans chaque type de BACC ?

[2] La fonction de probabilité d'une loi de Poisson de paramètre m est : $P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$.

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : $2^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DU SEMESTRE 2 - MAI 2004
A. NASSIRI
Durée : 3 heures
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS NORMALE ET STUDENT
Calculatrice autorisée : modèle standard

1. Question de cours (1 point par question). Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et la réponse exacte (Vrai ou Faux)

N	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau de confiance donné et une taille d'échantillon donnée, la longueur de l'intervalle de confiance bilatéral symétrique est fixe.		$\otimes$
Q2	Pour qu'une estimation soit de bonne qualité, il suffit qu'elle ne soit pas biaisée.		$\otimes$
Q3	La variance empirique S_n^2 est une estimation sans biais de la variance σ^2.		$\otimes$

2. Une entreprise de location de voitures s'intéresse au temps que ses véhicules passent en réparation. En consultant les fiches d'entretien d'une centaine de voitures, on constate les informations suivantes relatives au nombre d'heures X de leur immobilisation au garage :

X	10	20	40	50	60	80	150
p_k	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.05	0.05

En supposant que les périodes de réparation suivent une loi Normale, trouver un intervalle de confiance à 95% pour l'estimation de la durée moyenne d'immobilisation. (3 pts)

$n = 100$, $\bar{X}_n = 45.50$, $S_n^2 = 894.75$, $S_{n-1}^2 = \frac{100}{100-1} S_n^2$, $S_{n-1}^2 = 903.7879 \Longrightarrow S_{n-1} = 30.0631$, $u_{97.5\%} = 1.96$.

$IC_95\% = \bar{X}_n \mp u_{97.5\%}\sqrt{\frac{S_{n-1}^2}{n}}$ $IC_95\% = [39.6076; 51.3924]$

3. Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} x^{\frac{1}{a}-1}, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases} \qquad \text{où } a \text{ est un nombre positif donné.}$$

   (a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 pt)
   Soit Y une nouvelle variable telle que $Y = -ln(X)$.
   (b) Donner une approximation $\big(E(Y), V(Y)\big)$ à partir de $\big(E(X), V(X)\big)$. (1 pt)
   (c) Calculer la fonction de densité et de répartition de la nouvelle variable Y. (1 pt)
   (d) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ et comparer avec leur approximations dans la question (b). (1 pt)

4. Le responsable d'une entreprise remarque que la structure des coûts de production suit un processus aléatoire Normale qui tourne autour d'une moyenne de 200 Euros par jour. Il décide alors de changer de procédé de fabrication afin d'améliorer la rentabilité. Au cours d'une période d'essai d'une dizaine de jours, il remarque que le coût quotidien du nouveau procédé tourne selon le même processus aléatoire autour de 190 Euros avec une variance de 64 Euros.

   Que peut-on en déduire ? (3 pts)

   (Indication : Calculer un intervalle de confiance à 95% pour la distribution des coûts quotidiens du nouveau procédé de fabrication, et comparer au coût moyen de l'ancien procédé)

5. A l'échelle nationale, le nombre de décès est de 20 pour 1000 patients hospitalisés. On souhaite réaliser une enquête sur les décès dans un hôpital particulier, et on désigne par F_n le taux de mortalité estimé sur un échantillon de n patients hospitalisés dans cet hôpital.

   (a) Déterminez la taille de l'échantillon si l'on accepte une erreur de 1 % avec une probabilité de 0.95 et en considérant que F_n suit une loi Normale. (2 pts)

   Nous nous intéressons uniquement à deux services de cet hôpital, en supposant que le service I représente le double en terme de patientèle que le service II. Une enquête est réalisée sur un échantillon de taille n fixée selon les conditions de la question 1. Ces n patients appartiennent aux deux services I et II selon le poids respectif de ces derniers. Après enquête, on constate que 2 personnes sont mortes dans chacun de deux services.

   (b) Calculer les trois probabilités de mortalité, celle de l'hôpital, et celles des deux services. Donner leur intervalles de confiance à 95%. (2 pts)

   (c) Que pensez-vous de la situation de cette hôpital par rapport aux statistiques nationales ? Quid des deux services ? (1 pt)

6. Estimer la droite de régression $y = \alpha + \beta x$ qui relie la valeur de la consommation Y à celle du revenu X (en Euros). Les données sont résumées à l'aide de la table de contingence des effectifs. Que pensez-vous de cette relation au vu de la théorie économique ? (2 pts)

	Y			
X	20	30	50	70
30	5	5	0	0
50	5	10	10	5
70	0	5	10	15
80	0	5	5	5
100	0	0	5	10

UBO, Faculté de Droit et Sciences Economiques de Brest
STATISTIQUE : 2$^{\text{ème}}$ année DEUG Sc. Eco
EXAMEN DU SEMESTRE 2 - JUIN 2004
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30 mn
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS NORMALE ET STUDENT
Calculatrice autorisée : modèle standard

1. Question de cours (1 point par question). Rapporter sur votre feuille le numéro de la question et la réponse exacte (Vrai ou Faux)

N	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau de confiance donné et une taille d'échantillon donnée, la longueur de l'intervalle de confiance bilatéral symétrique est variable		
Q2	Pour qu'une estimation soit de bonne qualité, il ne faut pas qu'elle soit biaisée.		
Q3	La variance empirique S_n^2 est une estimation biaisée de la variance σ^2.		

2. Une entreprise de location de voitures s'intéresse au temps de location de ses véhicules. En consultant les fiches de gestion d'une centaine de voitures, on constate les informations suivantes relatives au nombre de jours de location dans l'année X :

X	10	20	40	50	60	80	150
n_k	10	20	20	30	10	5	5

En supposant que les périodes de les durées de location suivent une loi Normale, trouver un intervalle de confiance à 99% pour l'estimation de la durée moyenne. (2 pts)

3. Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases} \quad \text{où } a \text{ est un nombre positif donné.}$$

   (a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. (1 pt)
   Soit Y une nouvelle variable telle que $Y = -ln(X)$.
   (b) Donner une approximation $\big(E(Y), V(Y)\big)$ à partir de $\big(E(X), V(X)\big)$. (0.5 pt)
   (c) Calculer la fonction de densité et de répartition de la nouvelle variable Y. (1 pt)
   (d) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ et comparer avec leur approximations dans la question (b). (0.5 pt)

4. Estimer la droite de régression $y = \alpha + \beta x$ qui relie la valeur de la consommation Y à celle du revenu X (en Euros). Les données sont résumées à l'aide de la table de contingence des effectifs. Que pensez-vous de cette relation au vu de la théorie économique ? (2 pts)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X	30	30	50	50	50	50	70	70	70	80	80	80	100	100
Y	20	30	20	30	50	70	30	50	70	30	50	70	50	70

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 2 : Semestre 2- Licence Eco-Gest
EXAMEN : MAI 2005
A. NASSIRI
Durée : 3 heures
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS POISSON ET KHI2
Calculatrice autorisée : modèle standard

Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1. Un fabricant d'automobiles présente à sa clientèle des voitures de 10 coloris possibles, 3 puissances différentes, et enfin 3 options possibles sur chaque gamme. Précisons que ces options sont cumulables. En l'absence de toute restriction, combien de modèles possibles peut-on proposer? (2 pts)

2. On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, d'un dé non pipé, et de 10 boules numérotées de 1 à 10. On définit les trois événements suivants :
   A : Obtenir "Pile" avec la pièce de monnaie,
   B : Obtenir un multiple de 2 avec le dé,
   C : Obtenir un nombre impair en tirant une boule

   (a) Calculer la probabilité de réalisation de chaque événement. (1 pt)
   $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$

   (b) Est-ce que ces trois événements sont indépendants ou incompatibles? Expliquez. (1 pt)

   (c) Calculer la probabilité des événements : $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$. (1 pt)
   $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$ et $P(A \cap B \cap C) = 1/8$.
   Si au moins un des événements se réalise, le gain est de 10 Euros ;
   si seulement un événement se réalise, le gain est de 20 Euros ;
   si seulement deux événements se réalisent, le gain et de 15 Euros.

   (d) Quel est le gain espéré et le gain le plus probable ? (2 pts) X : "Variable aléatoire qui représente le gain". $Pr(X = 10) = Pr(A \cup B \cup C)$

3. Les données sur la consommation (Y) et le revenu (X) sont résumées comme suit à l'aide de la table de contingence des effectifs.

		Y		
		15	20	30
X	5	10	0	0
	10	15	10	5
	15	5	10	15
	20	5	10	15

(a) Estimer le coefficient de corrélation entre le revenu et la consommation. (1 pt)

(b) Vérifier la dépendance entre ces deux variables à l'aide du test de Khi2. (1 pt)

(c) Que pensez-vous ? (1 pt)

4. La population active est répartie selon trois catégories socio-professionnelles (CSP) que l'on distingue par les lettres A, B et C. On réalise une enquête auprès de ces trois populations afin d'étudier leur taux d'insertion professionnelle.

   On suppose que cette population compte 40000 personnes et que la CSP A compte autant de monde que les deux autres réunies. On suppose aussi que le taux de chômage est de 4% dans la CSP A et double dans les deux autres. L'enquête est réalisée auprès de 100 personnes choisies au hasard dans la CSP A, et 50 parmi chacune des deux autres.

   (a) Quelle est la loi du processus d'exclusion dû au chômage dans chaque CSP ? (2 pts)

   (b) Par quelles lois peut-on approximer celle-ci ? (2 pts)

   (c) Quelle est la probabilité d'avoir 5 personnes au chômage dans chaque CSP ? (2 pts)

5. On suppose que le risque de base d'échouer à l'examen final (événement noté E) est de 10% chaque année et que celui-ci quintuple lorsque l'étudiant s'absente plus d'une fois. On mesure par p l'ampleur de l'absentéisme (événement noté A) durant l'année universitaire 2004-2005.

   (a) Quel serait le taux d'échec total ? (1 pt)

   (b) On prend une personne au hasard et on constate qu'elle a échoué. Quelle est la probabilité que ce soit à cause de l'absentéisme ? (1 pt)

   (c) Calculer cette probabilité pour des valeurs de $p = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. (1 pt)

   (d) Commentaire. (1 pt)

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 3 : Semestre 4- Licence Eco-Gest
EXAMEN : MAI 2005
A. NASSIRI
Durée : 3 heures
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS NORMALE ET STUDENT
Calculatrice autorisée : modèle standard

Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1. Question de cours (1 point par question). Rapporter sur votre feuille le tableau suivant contenant le numéro de la question et la réponse exacte (Vrai ou Faux)

N	Question	Vrai	Faux
Q1	Pour un niveau de confiance donné et une taille d'échantillon donnée, la longueur de l'intervalle de confiance bilatéral symétrique est constante		
Q2	Pour qu'une estimation soit de bonne qualité, il suffit qu'elle ne soit pas biaisée.		
Q3	La variance empirique S^2_{n-1} est une estimation biaisée de la variance σ^2.		

2. Soit X est une variable aléatoire Normale telle que $Pr(X < 4) = Pr(X > -2) = 0,8413$, calculer $Pr(-2 < X < 1)$. (2 pts)

3. Soit X une v.a de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases} \quad \text{où } \alpha \text{ et } \lambda \text{ sont deux paramètres positifs.}$$

Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{4}$, on sait que $E(X) = 32$.

Soit Y une nouvelle variable telle que $Y = X^{\alpha}$.

(a) Donner une approximation de $E(Y)$. (1 pt)

(b) Calculer $g(y)$ la fonction de densité de Y. (1 pt)

(c) A l'aide de cette densité, calculer $E(Y)$. (1 pt)

(d) Que constatez-vous ? (1 pt)

4. Le directeur des ressources humaines a remarqué que le temps d'assemblage de pièces complexes tournait par le passé autour de 30 minutes en moyenne selon une variance de 81 minutes. Il cherche à effectuer de nouveau un test de dextérité manuelle pour estimer ce temps moyen.

(a) Combien d'employés doit-il choisir pour que l'intervalle de confiance à 95% soit de longueur 6 ? (1 pt)

Finalement, il ne choisit de manière aléatoire que 16 employés et leur passe le test.

(b) Déterminer la loi et les paramètres de la moyenne de l'échantillon ? (1 pt)

(c) Quelle est la probabilité pour que cette moyenne soit inférieure à 27 ? (1 pt)

(d) Quelle est la probabilité pour que l'écart entre la moyenne de cet échantillon et celle de la population ne dépasse pas 3 en valeur absolue ? (1 pt)

5. On admet que la durée de vie d'un moteur X, mesurée en kilomètres parcourus, est distribuée selon une loi Normale de variance égale à 36 millions. On en choisit 25 unités et on les fait rouler jusqu'à usure totale. On obtient alors : $\sum X_i = 500000$; $\sum(X_i - \overline{X}_n)^2 = 600$ millions.

   (a) Calculer l'intervalle de confiance à 95% pour l'estimation de la durée de vie moyenne $\overline{X}_n$ de ce type de moteurs. (1 pt)

   (b) Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour que la différence entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population n'excède pas 500 Kms, avec une probabilité au moins égale à 0,95 ? (1 pt)

6. Estimer *(a- 2pts)* la droite de régression $y = \alpha + \beta x$ qui relie la valeur de la consommation Y à celle du revenu X. Les données sont résumées à l'aide de la table de contingence des effectifs. Estimer *(b- 1 pt)* le coefficient de corrélation entre le revenu et la consommation. Que pensez-vous *(c- 2 pts)* de cette relation au vu de la théorie économique ?

	Y			
X	10	15	20	30
5	5	5	0	0
10	5	10	10	5
15	0	5	10	15
20	0	5	5	5
25	0	0	5	10

$XbarnN(30, 81/n)$
$n = (1,96/3)^2 81 = 35$
pi(-1,33)
y
10 15 20 30 X 5 10 15 20 25 10 15 20 30
5 5 5 0 0 10 5 10 10 5 15 0 5 10 15 20 0 5 5 5 25 0 0 5 10 n= 100.00 pxy 0.05 0.05 0.00 0.00 0.05 0.10 0.10 0.05 0.00 0.05 0.10 0.15 0.00 0.05 0.05 0.05 0.00 0.00 0.05 0.10 py 0.10 0.25 0.30 0.35 px 0.10 0.30 0.30 0.15 0.15 Ex 14.75 Ey 21.25 cov 21.56 varX 36.19 byx 0.60 ayx 12.46 varY 49.69 bxy 0.43 rho 0.51 a*a' 0.51 (gauss)

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 2 : Semestre 2- Licence Eco-Gest
EXAMEN : JUIN 2005
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30
DOCUMENT JOINT : TABLE DE POISSON

Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.
Barème : 2 points par question

1. Un fabricant d'automobiles présente des modèles de voiture qui sont différents selon trois coloris et cinq puissances. Il offre aussi la possiblité de disposer de trois options et de les cumuler.

   (a) Combien y-a-t-il de modèles équipés toutes options ?

   (b) Quelle est la probabilité qu'on lui commande des modèles dotés d'au moins une option ?

2. Nous retenons deux types de cancer, un premier A qui est dû aux comportements à risque (fumer par exemple) et un second B lié aux facteurs héréditaires. Supposons que le risque de développer le premier type est de 10% et le second de 5%. Quelle serait la fréquence de cette maladie selon les trois scenarii suivants ?

   (a) les deux types sont incompatibles,

   (b) les deux types sont compatibles mais indépendants,

   (c) les deux types sont dépendants en ce sens que le risque est plus important lorsqu'on cumule les facteurs héréditaires aux comportements à risque. Supposons alors que le risque qu'un fumeur développe cette maladie double lorsqu'il présente des facteurs héréditaires.

   (d) Que signifient ces trois scenarii et que déduisez-vous des probabilités correspondantes?

3. L'entreprise compte trois ateliers (A, B, C) qui produisent le même produit. La production totale est de 40000 unités dont la moitié provient de l'atelier A ; B et C se partagent le reste à parts égales. Le responsable du service après vente remarque que les clients sont de plus en plus mécontents et le taux de retour des produits est de plus en plus important. Il décide alors de faire son enquête et constate que ce taux est de 2% pour l'atelier A et double pour les deux autres. L'enquête est réalisée sur 200 unités choisies au hasard parmi les ventes des produits de l'atelier A, et 100 unités parmi les ventes des produits de chacun des deux autres.

   (a) Quelle est la loi du volume des produits invendus dans chaque atelier ?

   (b) Par quelles lois peut-on approximer celle-ci ?

   (c) Combien espère-t-on avoir d'unités invendues dans chaque atelier, et quelle est la probabilité correspondante ?

   (d) On constate que 4 unités ont été renvoyées par les clients. Sachant que l'on ne peut plus identifier l'atelier de provenance, quelle est la probabilité que ces 4 unités proviennent de l'atelier A ?

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 3 : Semestre 4- Licence Eco-Gest
EXAMEN : JUIN 2005
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS NORMALE ET STUDENT
Calculatrice autorisée : modèle standard
Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1. Reconstituez ce tableau sur votre copie en y reportant seulement le numéro de la question dans une première colonne, suivi du numéro de la réponse dans une seconde colonne. (1 point par question)

n^0	**Question**	**Réponse**		
Q1.	$U \sim N(0,1)$ telle que $Pr(\mid U \mid < a) = 0,82$ et $Pr(U < -b) = 0,61$	Rép1.: $a = 1,34$ $b = -0,28$	Rép2.: $a = -1,34$ $b = -0,28$	Rép3.: $a = 1,34$ $b = 0,28$
Q2	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X > -3) = 0,6915$ et $Pr(X < 2) = 0,9772$	Rép1.: $\mu = 2$ et $\sigma^2 = -4$	Rép2.: $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 4$	Rép3.: $\mu = -2$ et $\sigma^2 = 4$
Q3.	La longueur d'un intervalle de confiance bilatéral à 90% d'une moyenne est	Rép1.: $u_{0,95} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	Rép2.: $2\ u_{95\%} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}$	Rép3.: $2\ u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2_{n-1}}{n-1}}$
Q4.	La longueur d'un intervalle de confiance bilatéral à 95% d'une fréquence est	Rép1.: $2\ u_{0,95} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}$	Rép2.: $2\ u_{95\%} \frac{F_n(1-F_n)}{\sqrt{n}}$	Rép3.: $2\ u_{97,5\%} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Q5.	Les paramètres de la droite de régerssion $y = a + bx$ sont :	Rép1.: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$	Rép2.: $\hat{b} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{(x_i-\overline{x})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$	Rép3.: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{\sum_{i=1}^n (y_i-\overline{y})^2}$ $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$

2. Exercice Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\alpha(x-1)} & \text{Si } x \geq 1, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

   (a) Calculer α, $E(X)$, $V(X)$ et $F(X)$ (2 pts)

   (b) Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = \frac{X-1}{2}$. Démontrer que la fonction de densité de Y est $g(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{Si } y \geq 0, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$ (2 pts)

3. Soit X et Y deux variables aléatoires positives telles que $E(X) = 4$, $V(X) = 9$ et $Y = X^\alpha$. Calculer une approximation de $E(Y)$ et de $\sigma(Y)$ dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ (3 pts)

4. Il s'agit d'une entreprise qui fournit un produit qui se présente sous forme de carton de 10 sacs. Le poids d'un carton vide est de 48 grammes. Le poids de chaque sac varie autour d'une moyenne de 1.02 kg avec un écart-type de 40 grammes. On cherche à contrôler le poids des sacs.

(a) Déterminez le nombre de sacs que vous devez contrôler pour que le poids moyen de votre échantillon ne soit pas loin de la moyenne théorique de plus ou moins 10 grammes, avec une probabilité supérieure ou égale à 0.99. (2 pts)

(b) Rappeler le théorème Central-Limite. (2 pts)

(c) Quel serait ce nombre si l'on suppose que le poids moyen d'un sac suit une loi Normale. (2 pts)

(d) Vous vous intéressez maintenant au poids des cartons remplis de sacs. Vous tirez un carton au hasard, quelle est la probabilité pour que le poids de ce carton soit inférieur à 10 kgs ? (2 pts)

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 2 : Semestre 2- Licence Eco-Gest
EXAMEN : MAI 2006
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30 minutes
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS POISSON ET KHI2
Calculatrice autorisée : modèle standard
Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1. Un fabricant d'automobiles présente à sa clientèle des voitures de 20 coloris possibles, 5 puissances différentes, et enfin 5 options. En l'absence de toute restriction, combien de modèles possibles peut-on proposer? (2 pts)

2. On dispose d'un dé non pipé et d'une urne de 10 boules dont 2 noires. On lance le dé, tire une boule et choisit une lettre de l'alphabet. On définit les trois événements suivants :

   A : Obtenir un multiple de 2 avec le dé,
   B : Obtenir une boule noire,
   C : Obtenir une voyelle.

   (a) Calculer la probabilité de réalisation de chaque événement. (1 pt)

   (b) Est-ce que ces trois événements sont indépendants ou incompatibles? Expliquez. (1 pt)

   (c) Calculer la probabilité des événements : $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $A \cup B \cup C$. (1 pt)

   Le jeu est comme suit :

   - Le joueur gagne 260 Euros s'il réalise au moins un des 3 événements;
   - Il perd 520 Euros s'il ne réalise aucun événement.

   (d) Commbien peut-il espérer gagner ? (2 pts)

   (e) Pour participer à ce jeux, il faut payer un droit d'entrée de 8 Euros. Est-ce que le jeux est équitable ? (1 pt)

3. Les données sur la consommation Y et le revenu X (en milliers d'euros) sont résumées comme suit à l'aide de la table de contingence des effectifs.

$X \setminus Y$	1	2	3
0,5	10	0	0
1	15	10	5
1,5	5	10	15
2	5	10	15

   (a) Estimer la consommation moyenne et le revenu moyen (1 pt)

   (b) Estimer la variance de la consommation et du revenu ainsi que leur covariance et leur coefficient de corrélation. (1 pt)

   (c) Vérifier la dépendance entre ces deux variables à l'aide du test de Khi2. (1 pt)

   (d) Que pensez-vous ? (1 pt)

4. La population active est répartie selon deux catégories socio-professionnelles (CSP) que l'on distingue par les lettres A et B. On réalise une enquête auprès de ces deux populations afin d'étudier leur taux d'insertion professionnelle.

   On suppose que la CSP A compte 10000 personnes avec un taux de chômage de 4%, alors que la CSP B n'en compte que la moitié avec un taux de chômage de 2%. L'enquête est réalisée auprès de 100 personnes choisies au hasard dans la CSP A, et 200 dans la CSP B.

   (a) Quelle est la loi du processus d'exclusion dû au chômage dans chaque CSP ? (2 pts)

   (b) Par quelles lois peut-on approximer celle-ci ? (2 pts)

   (c) Quelle est la probabilité d'avoir 5 personnes au chômage dans chaque CSP ? (2 pts)

   (d) 5 personnes sont prises au hasard. Elles sont toutes au chômage, quelle est alors la probabilité qu'elles appartiennent toutes à la CSP A? (2 pts)

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 2 : Semestre 2- Licence Eco-Gest
EXAMEN : MAI 2006
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30 minutes
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS POISSON ET KHI2
Calculatrice autorisée : modèle standard

Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1. **FAIT** Un fabricant d'automobiles présente à sa clientèle des voitures de 20 coloris possibles, 5 puissances différentes, et enfin 5 options. En l'absence de toute restriction, combien de modèles possibles peut-on proposer? (2 pts)

   Corrigé : $20 \times 5 \times 2^5$

2. **FAIT** On dispose d'un dé non pipé et d'une urne de 10 boules dont 2 noires. On lance le dé, tire une boule et choisit une lettre de l'alphabet. On définit les trois événements suivants :

   A : Obtenir un multiple de 2 avec le dé,
   B : Obtenir une boule noire,
   C : Obtenir une voyelle.

   (a) Calculer la probabilité de réalisation de chaque événement. (1 pt)

   (b) Est-ce que ces trois événements sont indépendants ou incompatibles? Expliquez. (1 pt)

   (c) Calculer la probabilité des événements : $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$. (1 pt)

   (d) Calculer la probabilité des événements : $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $A \cup B \cup C$. (1 pt)

   Le jeu est comme suit :

   - Le joueur gagne 260 Euros s'il réalise au moins un des 3 événements;
   - Il perd 520 Euros s'il ne réalise aucun événement.

   (e) Commbien peut-il espérer gagner ? (2 pts)

   (f) Pour participer à ce jeux, il faut payer un droit d'entrée de 8 Euros. Est-ce que le jeux est équitable ? (1 pt)

   Corrigé :

   (a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ et $P(C) = \frac{5}{26}$

   (b) Indépendants. Expliquez.

   (c) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{2}\frac{5}{26}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{5}\frac{5}{26}$ et $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{5}{26}$.

   (d) $Pr(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = Pr(\overline{A}) \times Pr(\overline{B}) \times Pr(\overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{21}{26} = \frac{84}{260}$ et $Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = 1 - Pr(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - \frac{84}{260} = \frac{176}{260}$

(e) X : "Variable aléatoire qui représente le gain".

Gain en Euros X_k	Evénement	Probabilité $Pr(.)$	$X_k \times p_k$
260	Au moins un événement	$Pr(X = 260) = Pr(A \cup B \cup C) = \frac{176}{260}$	176
-520	Aucun événement	$Pr(X = -520) = Pr(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{84}{260}$	-168
			$E(X) = 8$

(f) $E(X)-$Droit d'entrée $= 0$. OUI.

3. **FAIT** Les données sur la consommation Y et le revenu X (en milliers d'euros) sont résumées comme suit à l'aide de la table de contingence des effectifs.

		Y		
		1	2	3
X	0,5	10	0	0
	1	15	10	5
	1,5	5	10	15
	2	5	10	15

(a) Estimer la consommation moyenne et le revenu moyen (1 pt)

(b) Estimer la variance de la consommation et du revenu ainsi que leur covariance et leur coefficient de corrélation. (1 pt)

(c) Vérifier la dépendance entre ces deux variables à l'aide du test de Khi2. (1 pt)

(d) Que pensez-vous ? (1 pt)

4. **FAIT** La population active est répartie selon deux catégories socio-professionnelles (CSP) que l'on distingue par les lettres A et B. On réalise une enquête auprès de ces deux populations afin d'étudier leur taux d'insertion professionnelle.

On suppose que la CSP A compte 10000 personnes avec un taux de chômage de 4%, alors que la CSP B n'en compte que la moitié avec un taux de chômage de 2%. L'enquête est réalisée auprès de 100 personnes choisies au hasard dans la CSP A, et 200 dans la CSP B.

(a) Quelle est la loi du processus d'exclusion dû au chômage dans chaque CSP ? (2 pts)

(b) Par quelles lois peut-on approximer celle-ci ? (2 pts)

(c) Quelle est la probabilité d'avoir 5 personnes au chômage dans chaque CSP ? (2 pts)

(d) 5 personnes sont prises au hasard. Elles sont toutes au chômage, quelle est alors la probabilité qu'elles appartiennent toutes à la CSP A?

Corrigé :

(a) $\begin{cases} \text{CSP A} : X_A \sim Hyp(N_A = 10000, n_A = 100, p_A = 4\%), \\ \text{CSP B} : X_B \sim Hyp(N_B = 5000, n_B = 200, p_B = 2\%) \end{cases}$ (2 pts)

(b) $\begin{cases} \text{CSP A} : X_A \sim Hyp(N_A = 10000, n_A = 100, p_A = 4\%) = Bin(n_A = 100, p_A = 4\%) = P(m_A = 4) \\ \text{CSP B} : X_B \sim Hyp(N_B = 5000, n_B = 200, p_B = 2\%) = Bin(n_B = 100, p_B = 2\%) = P(m_B = 4) \end{cases}$
(2 pts)

(c) $Pr(X_A = 5) = Pr(X_B = 5) = \frac{e^{-5}4^5}{5!} = 0,1563$ (2 pts)

(d)

Pr(A)		Pr(B)	
$\frac{10000}{10000+5000} = \frac{2}{3}$		$\frac{5000}{10000+5000} = \frac{1}{3}$	
$Pr(C/A)$	$Pr(\overline{C}/A)$	$Pr(C/B)$	$Pr(\overline{C}/B)$
$0,1563$		$0,1563$	

Règle de Bayes : $Pr(A/C) = \frac{Pr(A)Pr(C/A)}{Pr(A)Pr(C/A)+Pr(B)Pr(C/B)} = \frac{\frac{2}{3}*0,1563}{\frac{2}{3}*0,1563+\frac{1}{3}*0,1563} = \frac{2}{3}$

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 3 : Semestre 4- Licence Eco-Gest
EXAMEN : MAI 2006
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS NORMALE ET STUDENT
Calculatrice autorisée : modèle standard
Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1.

n^0	Question	Réponse		
Q1.	$U \sim N(0,1)$ telle que $Pr(\mid U \mid < a) = 87,70\%$ et $Pr(U < -b) = 71,90\%$	Rép1.: $a = 1,16$ $b = -0,58$	Rép2.: $a = -1,16$ $b = -0,28$	Rép3.: $a = 1,17$ $b = 0,68$
Q2.	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X < 3) = 0,8413$ $Pr(X \geq -1) = 0,8413$	Rép1.: $Pr(0 < X < 1)$ $= 0,1519$	Rép2.: $Pr(0 < X < 1)$ $= 0,1915$	Rép3.: $Pr(0 < X < 1)$ $= 0,2599$

2. Exercice Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = 2e^{-\alpha(x-1)}$ si $x \geq 1; 0$ sinon
   (a) Démontrer que $\alpha = 2$, et calculer $E(X)$, $V(X)$. (3 pts)
   (b) Calculer $F(X)$ (1 pt)
   (c) Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = 2(X-1)$. Calculer la fonction de répartition et de densité de Y. (2 pts)

3. On admet que la durée de vie d'un être humain X est distribuée selon une loi Normale de variance égale à 36 ans. On cherche à estimer l'espérance de vie, μ, mais l'on ne dispose que de quelques informations sur un échantillon de 25 personnes. On sait seulement que ces derniers ont vécu un total de 2000 ans : $\sum X_i = 2000$.
   (a) Peut-on obtenir une estimation ponctuelle de l'espérance de vie ? (1 pt)
   (b) Quelle est la qualité de cette estimation ? (1 pt)
   (c) Calculer un intervalle de confiance à 95% pour cette estimation (2 pts)
   (d) Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour que la différence entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population n'excède pas 10 ans, avec une probabilité au moins égale à 0,95 ? (2 pts)

4. Nous cherchons à estimer la relation entre le revenu noté X, et la consommation notée Y. Une enquête auprès d'une dizaine de personnes, nous donne les informations suivantes.

X	5	10	15	20	30	20	30	15	25	30
Y	10	10	10	15	25	25	30	10	10	25

   (a) Estimer la moyenne, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation du revenu et de la consommation. *(2pts)*
   (b) Estimer la droite de régression $y = \alpha + \beta x$ *(2pts)*
   (c) Faire le graphe de la droite et en donner un commentaire. *(2 pts)*

UBO, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et de Gestion
STATISTIQUE 3 : Semestre 4- Licence Eco-Gest
EXAMEN : MAI 2006
A. NASSIRI
Durée : 1 heure 30
DOCUMENT JOINT : LES TABLES DES LOIS NORMALE ET STUDENT
Calculatrice autorisée : modèle standard
Veuillez respecter la numérotation des exercices et de leurs questions.
Déroger à cette condition coûte des points.

1.

n^0	Question	Réponse		
Q1.	$U \sim N(0,1)$ telle que $Pr(\mid U \mid < a) = 87,70\%$ et $Pr(U < -b) = 71,90\%$	Rép1.: $a = 1,16$ $b = -0,58$	Rép2.: $a = -1,16$ $b = -0,28$	Rép3.: $a = 1,17$ $b = 0,68$
Q2.	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que $Pr(X < 3) = 0,8413$ $Pr(X \geq -1) = 0,8413$	Rép1.: $Pr(0 < X < 1)$ $= 0,1519$	Rép2.: $Pr(0 < X < 1)$ $= 0,1915$	Rép3.: $Pr(0 < X < 1)$ $= 0,2599$

Corrigé :

n^0	Question	Réponse
Q1.	$U \sim N(0,1)$ telle que	Rép1.
Q2.	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que	Rép1.
Q3	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ telle que	Rép2.
Q4.	La longueur d'un intervalle	Rép2.
Q5.	La longueur d'un intervalle	Rép3.:
Q6.	Les paramètres de la droite de	Rép1.

2. Exercice Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = 2e^{-\alpha(x-1)}$ si $x \geq 1; 0$ sinon

   (a) Démontrer que $\alpha = 2$, et calculer $E(X)$, $V(X)$. (3 pts)

   (b) Calculer $F(X)$ (1 pt)

   (c) Soit Y une variable aléatoire telle que $Y = 2(X - 1)$. Calculer la fonction de répartition et de densité de Y. (2 pts)

   Corrigé :

   (a) $\alpha = 2$.

   (b) $E(X) = \frac{3}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{4}$.

   (c) $F(X) = 1 - e^{-2(x-1)}$ si $x \geq 1$.

   (d) $G(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{Si } y \geq 0, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$ $g(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{Si } y \geq 0, \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$ (2 pts)

3. On admet que la durée de vie d'un être humain X est distribuée selon une loi Normale de variance égale à 36 ans. On cherche à estimer l'espérance de vie, μ, mais l'on ne dispose que de quelques informations sur un échantillon de 25 personnes. On sait seulement que ces derniers ont vécu un total de 2000 ans : $\sum X_i = 2000$.

   (a) Peut-on obtenir une estimation ponctuelle de l'espérance de vie ? (1 pt)

(b) Quelle est la qualité de cette estimation ? (1 pt)

(c) Calculer un intervalle de confiance à 95% pour cette estimation (2 pts)

(d) Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour que la différence entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population n'excède pas 10 ans, avec une probabilité au moins égale à 0,95 ? (2 pts)

Corrigé :

(a) $\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{2000}{25} = 80$

(b) Bonne sous les conditions développées dans le cours de stat : BIAIS et Erreur d'estimation, convergence quand n est grand. Le seul hic : dépendance+ hétérogénéité+ Petit échantillon

(c) $\overline{X}_n \mp u_{97,5\%}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ avec $u_{97,5\%} = 1,96$ le quantile d'une loi Normale car la variance $\sigma^2 = 36$ est connue et n'est pas estimée. $80 \mp 1,96\sqrt{\frac{36^2}{25}} = 80 \mp 1,96\frac{36}{5} = [65,89; 94,11]$

(d) $\frac{10}{\frac{36}{\sqrt{n}}} = u_{97,5\%} \Longleftrightarrow n = \left(\frac{1,96}{10}36\right)^2 = 49,79$. Il fallait donc au moins 50 personnes pour que l'estimation soit aussi précise.

4. Nous cherchons à estimer la relation entre le revenu noté X, et la consommation notée Y. Une enquête auprès d'une dizaine de personnes, nous donne les informations suivantes.

X	5	10	15	20	30	20	30	15	25	30
Y	10	10	10	15	25	25	30	10	10	25

(a) Estimer la moyenne, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation du revenu et de la consommation. *(2pts)*

(b) Estimer la droite de régression $y = \alpha + \beta x$ *(2pts)*

(c) Faire le graphe de la droite et en donner un commentaire. *(2 pts)*

Corrigé :

(a) $\overline{X} = 20$, $\overline{Y} = 17$, $S_n^2(X) = 70$, $S_n^2(Y) = 61$, $COV = 50$. $\rho(X,Y) = 76,52\%$ *(2pts)*

(b) $y = 2,71 + 0,765x$ *(2pts)*

(c) Faire le graphe de la droite et en donner un commentaire. *(2 pts)*